Chapitre 1.

Fonctions de distribution et de réarrangement.

Introduction.

D'une manière générale, l'espace, dont les éléments sont des fonctions , est appelé **espace fonctionnel**.

Par exemple on peut citer l'espace fonctionnel de Lebesgue L_p , dans la théorie des distributions l'espace fonctionnel D constitué par les fonctions de base et autres. Les espaces fonctionnels sont appliqués dans différents domaines de mathématiques, par exemple dans la théorie des opérateurs, aux équations aux dérivées partielles .

Notre programme comprend l'étude de plusieurs espaces fonctionnels et certaines applications , à savoir, les espaces de Marsinkevich, (espaces faibles), les espaces de Morrey et ceux de Nikolsky et de Besov.

On peut consulter les livres suivants :

1. H. Brezis. *Analyse fonctionnelle et applications.*

2. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. *Eléments de la théorie des fonctions et d'analyse fonctionnelle.*

3. L.V. Kantorovich, G.P. *Akilov. Analyse fonctionnelle.* 2ème edition , M ; Nauka, 1977.s

On commence par considérer deux notions, les fonctions de distributions et de réarrangement qui seront nécessaire par la suite.

1) Fonctions de distribution.

Définition 1. *Soit* $E \in \mathbb{R}^n$, E *ensemble mesurable, tel que* $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, *une fonction mesurable. La fonction* λ_f *est dite une fonction de distribution de f, si :* $\forall\ \sigma \in [0,\infty)$, *l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\}. \tag{1}$$

Remarque 1. *De la définition on peut déduire :*

(1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$.

(2) *Si* $f \sim g$ *, alors :* $\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma)$ *sur* $[0, \infty)$.

(3) *Si p.p sur* E $|f| > |g|$ *, alors :* $\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma)$ *,* $\forall\ \sigma \in [0,\infty)$,

Preuve:

(*1*) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$ évidente.

(2) Soient $E = (0, \infty)$, $\sigma \in [0,\infty)$ *et* $g \sim f$,

$g \sim f \Leftrightarrow$ ($g \neq f$ sur $E_1 \subset E$ tel que : *mes* $\{E_1 = 0)$ *et* ($g = f$ sur $E / E_1 = E_2$),

tel que $E = E_1 \cup E_2$.

$$\lambda_f(\sigma) = mes\ \{x \in E : |g(x)| > \sigma\}$$

$$= mes\ \{x \in E_1 : |g(x)| > \sigma\} + mes\ \{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\}$$

$$= mes\ \{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\}$$

$$= mes\ \{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\}$$

$$= mes\ \{x \in E_1 : |f(x)| > \sigma\} + mes\ \{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\}$$

$$= mes\ \{x \in E : |f(x)| > \sigma\} = \lambda_f(\sigma).$$

D'où :

$$\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma).$$

3) On pose :

$$\lambda_f(\sigma) = mes\ \{x \in E : |f(x)| > \sigma\} = mes\ \{E_1\},$$

$$\lambda_g(\sigma) = mes\ \{x \in E : |g(x)| > \sigma\} = mes\ \{E_2\}.$$

Donc

$$|g(x)| > \sigma \mapsto |f(x)| > \sigma.$$

Alors si

$$\{x \in E_2 \mapsto x \in E_1\} \mapsto E_2 \subset E_1$$

$$\Rightarrow mes\,\{E_2\} \;\leq\; mes\,\{E_1\}$$

$$\Rightarrow \;\lambda_g\,(\sigma) \;\leq\; \lambda_f\,(\sigma)\,.$$

Théorème 1. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$, E, *ensemble mesurable,* f *est une fonction mesurable sur* E, *alors si :*

i) $1 < p < \infty$, *on a :*

$$\|f\|_{L_{p(E)}} = \left(p\int_0^{\infty} \sigma^{\,p-1}\;\lambda_f\,(\sigma)\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} = \left(-\int_0^{\infty} \sigma^{\,p}\;d\,\lambda_f\,(\sigma)\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

ii) *si :* $p = \infty$, *on a :*

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\,\{\,\sigma : \;\lambda_f\,(\sigma) = 0\}\,. \qquad (3)$$

iii) *si :* $p = 1$, *on a :*

$$\|f\|_{L_{1(E)}} \;=\; \|\lambda_f\,(\sigma)\|_{L_{1(E)}}. \qquad (4)$$

Preuve.

(*i)* Pour $1 < p < \infty$, on a :

$$\int_0^{\infty} \sigma^{\,p-1}\;\lambda_f\,(\sigma)\,d\sigma \;=\; \int_0^{\infty}\frac{\sigma^p}{\sigma}\;\lambda_f\,(\sigma)\,d\sigma$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_{\{x\,:\;|f|\,>\,\sigma\}} d\mu\right)d\sigma$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_E 1\,\{x \;:\; |f| \;>\; \sigma\}\,d\mu\right)d\sigma\;,$$

d'aprés le théorème de Fubini, on obtient :

$$= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma} \quad \int_E 1\,\{x \ : \ |f| \ > \ \sigma\}\, d\mu \ \ d\sigma \ = \ \int_E \left(\int_0^{|\,f(x)|} \frac{\sigma^p}{\sigma} \ \ d\sigma \right) \, d\mu$$

$$= \int_E \frac{1}{p} \ \ |f(x)|^{\,p} \ \ dx$$

$$= \frac{1}{p} \int_E |f(x)|^{\,p} \ \ dx$$

$$= \frac{1}{p} \ \ \|f\|_{L_P}^{\,p} \, .$$

D'où

$$\frac{1}{p} \ \ \|f\|_{L_P}^{\,p} \ = \ \int_0^\infty \sigma^P \ \lambda_f(\sigma) \ \frac{d\sigma}{\sigma} \ \ ,$$

$$\|f\|_{L_P}^{\,p} \ \ = p \int_0^\infty \sigma^P \ \lambda_f(\sigma) \ \frac{d\sigma}{\sigma} \ \ ,$$

$$\|f\|_{L_P} \ \ = \left(p \int_0^\infty \sigma^P \ \lambda_f(\sigma) \ \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

(ii) Pour $p = \infty$ on a par définition :

$$\|f\|_{L_\infty} \ = \ \inf\,\{\sigma \ \geq 0, \ \ mes\,\{x \in E \ : \ \ |f(x)| > \ \sigma\} = 0\} \ ,$$

d'après la définition de $\lambda_f(\sigma)$,

$$\|f\|_{L_\infty} \ = \ \inf\,\{\sigma \ : \lambda_f(\sigma) = 0\} \ .$$

(iii) On remplace dans (2) $p = 1$, on obtient :

$$\|f\|_{L_1(E)} \quad \int_0^\infty \lambda_f(\sigma)\, d\sigma = \ \ \|\lambda_f(\sigma)\|_{L_1(E)} \ .$$