Contents

Introduction **3**

1 Mesures de noncompacité **7**

1.1 Préliminaires 7

1.2 Mesures de noncompacité de Kuratowski et de Hausdorff . . . 9

2 Les opérateurs condensés **15**

2.1 Définition et propriétés générales 15

Annexe **18**

Introduction

La notion des opérateurs complètement continus joue un rôle fondamental dans la théorie des équations différentielles ordinaires, si l'opérateur en question n'est pas complètement continu, l'équation différentielle n'admet pas nécessairement une solution. Alors, il s'est avéré avantageux de mesurer la déviation d'un opérateur continu à un opérateur complètement continu, un moyen pour le faire est d'introduire la notion d'opérateurs condensés.

Un opérateur condensé est un opérateur dans lequel l'image d'un ensemble est plus compacte que l'ensemble lui même, dans un certain sens. Pour mesurer le degré de noncompacité, on introduit des fonctions appelées "Mesures de noncompacité", elles sont définies de sorte qu'elles soient stables par passage à la couverture convexe fermée d'un ensemble borné. Les MNCs de Hausdorff et de Kuratowski donnent des exemples concrets des MNCs. En se basant sur cette notion, un opérateur condensé est un opérateur qui démunie la mesure de noncompacité d'un ensemble qui n'est pas relativement compact. Les premiers exemples sont fournis par les opérateurs complètement continus, les contractions et la somme de ces opérateurs avec des mesures de noncompacité convenables.

Au cours d'étude des propriétés des opérateurs condensés, une grande ressemblance aux opérateurs complètement continus a été remarquée; la notion d'indice du point fixe a trouvé son essor dans cette théorie. L'indice d'un opérateur condensé est défini et possède les mêmes propriétés connues dans la théorie classique de l'indice. Les résultats obtenus sont hérités de ceux des opérateurs complètement continus. La façon dans laquelle l'indice est défini ne joue aucun rôle dans les applications, ce qui est fondamental est le fait que cet indice est bien défini et possède des propriétés particulières.

Le traitement de la notion de mesure de noncompacité est fait en premier chapitre, en donnant les définitions des différentes mesures de noncompacité et les principaux résultats connus. En deuxième chapitre, nous avons défini les opérateurs condensés et leurs propriétés élémentaires. Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'indice du point fixe, en exposant sa construction, son existence et nous verrons l'extension des propriétés d'indice du point fixe des opérateurs complètement continus. Finalement, en quatrième chapitre, nous traitons le problème d'existence d'une solution d'une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach quelconque, en exploitant les résultats obtenus dans les premiers chapitres.

Aperçu historique

En 1930, dans son article "Sur les espaces complets", C.Kuratowski introduisait la première mesure de noncompacité, notée α, dans ses travaux en topologie, pour donner une généralisation du théorème de Cantor. En 1955, G.Darbo définissait la notion d'opérateur α-condensé et il démontrait son célèbre théorème du point fixe qui étend le théorème classique de Schauder et le principe de contraction de Banach.

L.S.Goldensteĭn, I.Goh'berg et A.S.Markus introduisaient la mesure de noncompacité de Hausdorff, notée χ, en 1957. Ils donnaient des formules pour calculer χ dans les espaces de Banach et ils prouvaient que la mesure de noncompacité χ de la boule unité égale à l'unité dans un espace de dimension infinie. Indépendamment, la définition générale de mesure de noncompacité avait été introduite par B.N.Sadovskiĭ.

En 1967, B.N.Sadovskii, de sa part, définissait la notion des opérateurs condensés par rapport à la mesure de noncompacité de Hausdorff, et plus tard il les généralisait aux familles des opérateurs condensés. Les propriétés des MNCs et des opérateurs condensés étaient étudiées par plusieurs auteurs, citons par exemples: B.N.Sadovskiĭ, R.D.Nussbaum, L.S.Goldensteĭn, I.Goh'berg et A.S.Markus...

Il est surprenant que les travaux de Kuratowski et Darbo restaient inconnus un longtemps. L.S.Goldensteĭn, I.Goh'berg et A.S.Markus qui construisaient la théorie des mesures de noncompacité des ensembles bornés en 1957-1965, ne savaient pas de ces travaux. Néanmoins, ces travaux commençaient à se dévoiler dès 1967 par Ambrosetti, Szufla, Furi, Vignoli, Nussbaum, Petryshyn et autres.

Le concept d'ensemble fondamental était introduit par M.Krasnosel'skiĭ, P. Zabreĭko et V. Strygin dans le but d'englober les point fixes des opérateurs. Par la suite, M. A. Krasnosel'skiĭ, P. P. Zabreĭko, A. S. Potapov, V. V Obukhovskiĭ, R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskiĭ, B. N. Sadovskiĭ et autres définissaient l'indice du point fixes des opérateurs condensés et autres classes d'opérateurs et étudiaient leur propriétés élémentaires.

Chapter 1

Mesures de noncompacité

1.1 Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons les principaux outils qui seront utiles dans toute la suite de ce travail.

Définition 1.1.1. *Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble de E. On appelle diamètre de A*

$$diam(A) = sup\{||x - y|| : x, y \in A\}.$$

Si A est borné, alors $diam(A) < \infty$. On pose par convention $diam(A) = 0$ (resp. ∞) si $A = \emptyset$ (resp. A est non borné).

Proposition 1.1.1 ([10]; page 56)**.** *Soient E un espace de Banach et $A, B \subset E$. Alors*

1. *Si $A \subset B$ alors $diam(A) \leq diam(B)$;*

2. *$diam(\lambda A) = |\lambda| diam(A)$, pour tout réel λ;*

3. *$diam(x_0 + A) = diam(A)$, pour tout élément $x_0 \in E$;*

4. $diam(A+B) \leq diam(A) + diam(B)$;

5. $diam(co(A)) = diam(A)$.

Preuve. On se limite de démontrer la $5^{ème}$ assertion.

On a $diam(A) \leq diam(co(A))$. Il reste à montrer l'inégalité inverse. Soient $x, y \in co(A)$, alors

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \text{ avec } x_i \in A, i = 1, \cdots, m,\ \lambda_i \in [0,1] \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

et

$$y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \text{ avec } y_j \in A, j = 1, \cdots, n,\ \mu_j \in [0,1] \text{ et } \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
||x-y|| &= ||\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j|| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) x_i - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) \mu_j y_j \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j ||x_i - y_j|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j diam(A) \\
&= diam(A)
\end{aligned}$$

et par suite $diam(co(A)) \leq diam(A)$.

c.q.f.d.

Définition 1.1.2. *Soient E un espace métrique et A un sous ensemble de E.*

1. *Un ensemble $A_\varepsilon \subset E$ est dit ε-réseau de A si $A \subset \bigcup_{x \in A_\varepsilon} \overline{B}(x, \varepsilon)$, où B est la boule unité ouverte dans E.*

2. *L'ensemble A est dit précompact*[1] *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε-réseau fini de A.*

3. *L'ensemble A est dit relativement compact si $\overline{A}$ est compact.*

Théorème 1.1.1. *Soit E un espace métrique complet. Une partie $A \subset E$ est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte.*

1.2 Mesures de noncompacité de Kuratowski et de Hausdorff

Dans cette section, nous définissons les MNCs de Hausdorff et de Kuratowski et leurs propriétés élémentaires. Dans toute la suite, on considère E un espace de Banach et Ω un sous ensemble de E.

Définition 1.2.1 ([2]; page 1)**.** *La mesure de noncompacité (MNC) de Kuratowski $\alpha(\Omega)$ d'un ensemble borné Ω est la borne inférieure des nombres $d > 0$ tel que Ω soit recouvert par un nombre fini d'ensembles de diamètre inférieur ou égal à d.*

Il est facile de voir que $0 \leq \alpha(\Omega) \leq diam(\Omega)$.

Définition 1.2.2 ([2]; page 2)**.** *La mesure de noncompacité de Hausdorff $\chi(\Omega)$ d'un ensemble borné Ω est la borne inférieure des nombres $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble Ω ait un ε-réseau fini dans E.*

Remarque 1.2.1.

1. *Le fait que Ω est borné assure l'existence des MNCs de Kuratowski et de Hausdorff (car, il existe toujours une boule contenant Ω, et le centre*

[1] On dit aussi que A est totalement borné.

de cette boule constitue un r-réseau de Ω, où r est le rayon de cette boule). Alors ces définitions ont bien un sens.

2. *Dans la définition de MNC de Hausdorff, au lieu d'un ε-réseau fini, on peut parler d'un ε-réseau relativement compact.*

Les MNCs α et χ possèdent de nombreuses propriétés, les plus importantes sont énumérées dans la proposition suivante et certaines autres seront mentionnées au fur et à mesure de leurs utilités.

Proposition 1.2.1 ([2]; page 2). *Soient E un espace de Banach et $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \subset E$ des ensembles bornés. On note ψ la MNC de Kuratowski ou de Hausdorff. Alors ψ vérifie les propriétés suivantes:*

1. *Régularité: $\psi(\Omega) = 0$ si et seulement si Ω est relativement compact;*
2. *Non-singularité: $\psi(\Omega) = 0$ si Ω est un singleton;*
3. *Monotonie: si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ alors $\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$;*
4. *Semi-additivité: $\psi\{\Omega_1 \cup \Omega_2\} = \max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$;*
5. *Semi-homogénéité: $\psi(t\Omega) = |t|\psi(\Omega)$ pour tout réel t;*
6. *Semi-additivité algébrique: $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$;*
7. *Invariance par translation: $\psi(\Omega + x_0) = \psi(\Omega)$, pour tout $x_0 \in E$.*

Preuve. On démontre cette proposition seulement pour la MNC α. La preuve est similaire pour χ.

1. Supposons que Ω est relativement compact , alors d'après le théorème (1.1.1), $\forall \varepsilon > 0$, il existe une famille finie$\{x_1, \cdots, x_{N_\varepsilon}\}$ d'éléments de E telle que $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} B(x_j, \varepsilon)$. Alors $\alpha(\Omega) = 0$. Réciproquement, si

$\alpha(\Omega) = 0$, d'après le même théorème, on conclut que Ω est relativement compact.

2. Tout singleton est relativement compact.

3. Soit $\{\Omega_1^2, \cdots, \Omega_n^2\}$ un recouvrement de Ω_2 tel que $diam(\Omega_i^2) \leq d, i = 1, \cdots, n$ alors il est clair que c'est un recouvrement de Ω_1 et par suite $\alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.

4. Posons $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $a = \max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$. Comme $\Omega_i \subset \Omega, i = 1, 2$, d'après la monotonie de α on aura $\alpha(\Omega_i) \leq \alpha(\Omega)$, donc $a \leq \alpha(\Omega)$. Réciproquement, montrons que $\alpha(\Omega) \leq a$. Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout Ω_1, Ω_2 il existe un recouvrement $\{\Omega_1^i, \cdots, \Omega_{n_i}^i\}$ de Ω_i tel que $diam(\Omega_j^i) \leq \alpha(\Omega_i) + \varepsilon \leq a + \varepsilon$, pour $i = 1, 2$, et $j = 1, \cdots, n_i$. Remarquons que ces ensembles Ω_j^i forment un recouvrement de Ω, alors $\alpha(\Omega) \leq a + \varepsilon$, et par suite $\alpha(\Omega) \leq a$ puisque ε est arbitraire.

5. est trivial pour $t = 0$. Si $t \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(t\Omega) &= \inf\{d > 0 : t\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i, diam(\Omega_i) \leq d\} \\
&= \inf\{d > 0 : \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{t}\Omega_i, |t| diam\big(\frac{1}{t}\Omega_i\big) \leq d\} \\
&= \inf\{d > 0 : \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{t}\Omega_i, diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq \frac{1}{|t|} d\} \\
&= \inf\{|t|d' > 0 : \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{t}\Omega_i, diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq d'\}, d' = \frac{1}{|t|} d \\
&= |t|\alpha(\Omega).
\end{aligned}$$

6. Soit $\{\Omega_1^1, \cdots, \Omega_m^1\}$ un recouvrement de Ω_1 et $\{\Omega_1^2, \cdots, \Omega_n^2\}$ un recouvrement de Ω_2. Alors les ensembles $\Omega_i^1 + \Omega_j^2$ forment un recouvrement

de $\Omega_1 + \Omega_2$, de plus $diam(\Omega_1 + \Omega_2) \leq diam(\Omega_1) + diam(\Omega_2)$ et par suite $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.

7. La propriété se déduit du fait que $diam(\Omega + x_0) = diam(\Omega)$.

c.q.f.d.

Théorème 1.2.2 ([12]; page 74)**.** *La MNC de Hausdorff est invariante par passage à la fermeture et à la couverture convexe, i.e.*

$$\chi(\overline{\Omega}) = \chi[co(\Omega)] = \chi(\Omega).$$

Preuve. Si S est un ε-réseau fini de Ω alors S est aussi un ε-réseau fini de $\overline{\Omega}$, d'où l'invariance de χ par passage à la fermeture. D'autre part, $co\, S$ est un ε-réseau compact de $co\Omega$. En effet, Soit $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ constitue un ε-réseau fini de Ω. Si $y \in co(\Omega)$, alors

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i, \ (\lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, y_i \in \Omega). \tag{1.1}$$

Comme $y_i \in \Omega$, il existe $x_i \in S$ tel que $\|y_i - x_i\| \leq \varepsilon$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où les coefficients $\lambda_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ sont les mêmes définis dans (1.1). Alors $x \in coS$ et on a

$$||y - x|| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ||x_i - y_i|| \leq \varepsilon.$$

On déduit que l'ensemble compact coS est un ε-réseau de $co\Omega$.

c.q.f.d.

Théorème 1.2.3 ([2]; page 3)**.** *Soient E un espace de Banach et B sa boule unité. Si E est de dimension finie, alors $\alpha(B) = \chi(B) = 0$, dans le cas contraire $\alpha(B) = 2$, et $\chi(B) = 1$.*

Preuve. En dimension finie, B est relativement compacte. Comme les MNCs α et χ sont invariantes par passage à la fermeture et sont régulières, alors $\alpha(B) = \chi(B) = 0$.

Si $dim(E) = \infty$. Commençons par la MNC χ. Le centre de la boule B forme un 1-réseau de B, alors $\chi(B) \leq 1$. Supposons que $\chi(B) = q < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $q + \varepsilon < 1$, et soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un $(q+\varepsilon)$-réseau de B:

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_i + (q+\varepsilon)B].$$

De la monotonie, la semi-additivité, l'invariance par translation et la semi-homogénéité de χ, il s'ensuit

$$q = \chi(B) \leq (q+\varepsilon)\chi(B) = q(q+\varepsilon).$$

D'où $\chi(B) = q = 0$, *i.e.* B est relativement compact, mais ceci est impossible puisque E est de dimension infinie.

Chapter 2

Les opérateurs condensés

2.1 Définition et propriétés générales

Définition 2.1.1 ([2]; page 21)**.** *Soit E un espace de Banach.*

1. *Un opérateur continu $f : D(f) \subset E \to E$ est dit χ-condensé si pour tout $\Omega \subset D(f)$, $\chi[f(\Omega)] \geq \chi(\Omega)$ implique Ω est relativement compact. Ou d'une manière équivalente, Un opérateur continu $f : D(f) \subset E \to E$ est dit χ-condensé si pour tout $\Omega \subset D(f)$, qui n'est relativement compact, on a*
$$\chi[f(\Omega)] < \chi(\Omega).$$
2. *Un opérateur continu f est dit (q, χ)-condensé si pour tout $\Omega \subset D(f)$:*
$$\chi[f(\Omega)] \leq q\chi(\Omega).$$

Proposition 2.1.1. *On a:*

(i) *Tout opérateur (q, χ)-condensé avec $q < 1$ est χ-condensé.*

(ii) *Soient f_1 un opérateur (q_1, χ)-condensé et f_2 un opérateur (q_2, χ)-condensé alors l'opérateur $f_2 \circ f_1$ est $(q_1 q_2, \chi)$-condensé.*

(iii) Soient f_1 un opérateur (q_1, χ)-condensé et f_2 un opérateur (q_2, χ)-condensé, alors la somme $f_1 + f_2$ est un opérateur $(q_1 + q_2, \chi)$-condensé.

(iv) Soient f_1 et f_2 deux opérateurs χ-condensés et soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que l'opérateur $f_\lambda = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$. est χ-condensé.

Preuve.

(i) Évidente.

(ii) Il est claire que $\chi[(f_2 \circ f_1)(\Omega)] \leq q_2 \chi[f_1(\Omega)] \leq q_1 q_2 \chi(\Omega)$.

(iii) Comme $(f_1 + f_2)(\Omega) \subset f_1(\Omega) + f_2(\Omega)$, de la monotonie et de la semi-additivité algébrique de χ nous obtenons

$$\chi[(f_1+f_2)(\Omega)] \leq \chi[f_1(\Omega)+f_2(\Omega)] \leq \chi[f_1(\Omega)]+\chi[f_2(\Omega)] \leq (q_1+q_2)\chi(\Omega).$$

Évidente.

c.q.f.d.

Nous terminons ce chapitre par un théorème qui est utilisé dans l'étude des équations différentielles dans les espaces de Banach de dimension infinie.

Théorème 2.1.1 ([1]; page 555)**.** *Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, $M \subset E_1$ un sous ensemble borné et $f : M \to E_2$ un opérateur continu. Supposons que:*

(i) f admet une représentation diagonale $f(x) = \Phi(x, x)$ où $\Phi : M \times E_2 \to E_2$;

(ii) Pour tout $y \in E_2$, l'ensemble $\Phi(M \times \{y\})$ est relativement compact;

(iii) Pour tout $x \in M$ l'opérateur $\Phi(x, \cdot)$ est q-Lipschitzien.

Alors l'opérateur f est (q, χ)-condensé.

Preuve. Nous devons montrer que pour tout ensemble $\Omega \subset M$,

$$\chi[f(\Omega)] \leq q\chi(\Omega). \tag{2.1}$$

Soit S un $[\chi(\Omega) + \varepsilon]$-réseau fini de Ω dans E_1. Considérons l'ensemble $S_1 = \Phi(\Omega \times S)$. Puisque $\Phi(M \times \{y\}), y \in S$ est relativement compact , l'ensemble S_1 est relativement compact, comme étant une réunion finie d'ensembles relativement compacts. Montrons maintenant que S_1 est un $q[\chi(\Omega) + \varepsilon]$-réseau de $f(\Omega)$ dans E_2. Soit $z \in f(\Omega)$, i.e. $z = f(x, x), x \in \Omega$ et soit $y \in S$ tel que $||x - y|| \leq \chi(\Omega) + \varepsilon$. Alors l'élément $z_1 = \Phi(x, y) \in S_1$ et

$$||z_1 - z|| = ||\Phi(x, y) - \Phi(x, x)|| \leq q||x - y|| \leq q[\chi(\Omega) + \varepsilon].$$

Puisque ε est arbitraire nous obtenons l'inégalité voulue.

c.q.f.d.

Corollaire 2.1.2 ([1]; page 555)**.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, si $q < 1$ l'opérateur f est χ-condensé.*

Bibliography

[1] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, B. N. Sadovskii, Condensing Operators, Itogi Nauki Tekhniki. 18 (1980), 551-592.

[2] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, B. N. Sadovskii, Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Birkhauser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[3] J. Appell, Measures of noncompactness, condensing opérators and fixed points: An application-oriented survey, Fixed Point Theory. 6 (2005), no. 2, 157-229.

[4] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24 (1955), 84-92.

[5] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sciences, 2006.

[6] L. Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Second Edition, Springer, 2006.

[7] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Walter de Gruyter, Berlin; New York, 2001.

[8] C. S. Kubrusly, The elements of operator theory, Birkhäuser, 2011.

[9] K. Kuratowski, Sur les espaces complets, Fund. Math. 15 (1934), 301-335.

[10] O'Regan. Donal, Je Cho. Yeol, Chen. Yu-Qing, Topological degree theory and applications, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[11] N. S. Papageorgiou, S. T. Kyritsi-Yiallourou, Handbook of applied analysis, Springer, 2009.

[12] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1 (1967), 74-76 (En Russe).

[13] B. N. Sadovskii, Limit-compact and condensing operator's, Uspckhi iVIa.t. Nauk 27 (1972), no. 1(163), 85-155.

[14] P. Volkmann, Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de Banach, Topological Methods in Differential Equations and Inclusions. (1995), 501-520.

[15] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. Vol. I : Fixed Point Theorems, Springer Verlag, New York, 1986.