Avant de passer à la preuve du théorème de Bernstein on précise quelques points.

1) Dans la définition 2 il faut enlever $B_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

2) Concernant la remarque (qui est) juste après la définition 2,

On explique pourquoi

$$B_n(x) \rightrightarrows f(x), \qquad (9')$$

c.à.d le polynôme $B_n(x)$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$.

Il n'est pas difficile de voir que si $f(x)$ est continue, alors pour n assez grand, le polynôme $B_n(x)$ diffère peu de $f(x)$. Explications :

Dans (**) du lemme 2, pour n assez grand, on aura

$$\sum_{k \in \Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2} \to 0,$$

$$\text{d'où } \sum_{k \in \Delta_n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

On conclut que l'idée du lemme 2 est que pour de très grandes valeures de n dans la somme

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

jouent un rôle important seulement les membres pour lesquels k vérifie

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta,$$

mais les autres n'ont presque aucune influence. Par conséquent les membres pour lesquels $\frac{k}{n}$ sont loins de x, ne jouent pratiquement aucun rôle.

Ceci est valable pour le polynôme $B_n(x)$, car les membres $f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont bornés. Donc on conclut que dans $B_n(x)$, sont réellement importants seuls les membres du polynôme où $\frac{k}{n}$ est proche de x, d'où pour ces membres de $B_n(x)$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \simeq f(x).$$

Donc le polynôme de Bernstein $B_n(x)$ change très peu si on change $f\left(\frac{k}{n}\right)$ par $f(x)$. En d'autres mots est valable l'égalité approximative suivante :

$$B_n(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} f(x)\, C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}. \qquad (10)$$

D'autre part on sait que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

alors en prenant en compte (10), on déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} f(x)\, C_n^k (1-x)^{n-k} \simeq f(x).$$

Le théorème de Bernstein précise l'approximation faite ci-dessus.

Preuve du théorème de Bernstein.

Soit $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

On prend $\varepsilon > 0$.

Soit $x \in [0,1]$, en vertu de (1), on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\, C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{d'où :}$$

$$\left|B_n(x)-f(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

On repartit les nombres k ~~en~~ 2 catégories A et B :

a) $k \in A$ si $\left|\frac{k}{n}-x\right| < \delta$, donc $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ puisque f est continue sur $[0,1]$.

b) $k \in B$ si : $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta$.

Si $k \in A$ on a :

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'où}$$

$$\sum_{k \in A} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{A} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $k \in B$ on a : $\left|\frac{k-nx}{n}\right| \geq \delta$, alors

$\frac{(k-nx)^2}{n^2} \geq \delta^2$ ou $\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geq 1.$

On a

$$\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right| \leq \left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| + |f(x)|$$

$$\leq 2\max|f(x)| = 2M.$$

On a les estimations suivantes qui sont évidentes

Soit $$I_2 = \sum_{k\in B}\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right| x^k C_n^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_B C_n^k x^k (1-x)^{n-k}(k-nx)^2$$

$$\leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{2M}{4\delta n^2} \leq \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Alors

$I_2 \leq \frac{M}{2n\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (on choisit $\varepsilon \geq \frac{M}{n\delta^2}$);

finalement $|B_n(x)-f(x)| < \varepsilon/2 + \frac{M}{2n\delta^2}$.

Si n est assez grand ($n > N_\varepsilon$), alors $\frac{M}{n\delta^2} < \varepsilon$ et $|B_n(x)-f(x)| < \varepsilon$. Comme le choix de N_ε est défini par $\frac{M}{n\delta^2} < \varepsilon$, alors il ne depend pas de x, d'où $B_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Fin de la preuve.