LES DISTRIBLITIONS:

Cours N° 1 : Fonctions de base

I. INTRODUCTION:

Les « fonctions » de distributions pour la 1ère fois ont été considérées par le physicien Dirac dans ses différentes recherches. le mathématicien russe S.L. Sobolev fut l'un des premiers qui ont établi les bases de la théorie des distributions (en 1936) et puis vient le mathématicien L. Shwarz (1950 – 1951).

Par la suite, ~~la théorie~~ cette théorie fut intensivement developpée par d'autres mathématiciens. Ces developpements sont dus aux besoins de la physique mathématique, la physique quantique et la théorie des équations aux dérivées partielles.

Actuellement ~~cette~~ la théorie des distributions connait beaucoup d'applications en physique, en mathématiques et d'autres disciplines.

Quelques livres recommandés:

1) Equations de la physique mathématique
   V. S. Vladimirov.
2) L. Shwarz : Les distributions
3) Problèmes de distributions
   Claude Azoulay.

Dans ce qui suit, on adoptera les notations suivantes :

1) Un multi-indice est un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^0$, $i = \overline{1,n}$, où $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2) $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ est appelée longueur de α.

3) $\alpha \pm \beta = \left((\alpha_1 \pm \beta_1), (\alpha_2 \pm \beta_2), \ldots, (\alpha_n \pm \beta_n)\right)$ où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

4) Soit $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$(\mathcal{D}^0 f)(x) = f(x).$$

5) $\alpha ! = \alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_n !$

II) Espace des fonctions de base

__Définition 1.__ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$\operatorname{supp} f(x) = \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}},$$

c'est à dire la fermeture de l'ensemble des $x \in \Omega$ tel que $f(x) \neq 0$.

Cet ensemble est appelé support de la fonction f.

__Définition 2.__ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω un ouvert et une fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.

La fonction φ est dite une fonction de base si :

1) $\varphi \in C^\infty(\Omega)$,
2) Le support de φ est un compact.

__Notation.__ L'espace des fonctions de base est designé par $D(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$.

Dans la définition suivante on introduit la notion de convergence dans l'espace $D(\Omega)$.

__Définition 3.__ Soit la suite des fonctions $(\varphi_k(x))$, où $\varphi_k(x) \in D(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$

On dit que la suite $(\varphi_k(x))$ converge vers $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in D(\Omega)$) si : 1) $\exists$ un nombre r tel que $0 < r < \infty$, $\operatorname{supp}(\varphi_k(x)) \subset B_r$ où B_r est la boule de centre zéro et de rayon r.
2) $\forall \alpha$, $\partial^\alpha \varphi_k \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$, quand $k \to +\infty$.

Ainsi l'espace linéaire $D(\Omega)$ muni de la convergence ci-dessus est appelé « espace des fonctions de base ».

Exemple de fonction de base (différente de zéro)

$$\varphi(x,\varepsilon) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp \dfrac{-x^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}, & \text{si } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{si } |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

où $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Exercice 1. Montrer que la fonction $\varphi(x,\varepsilon)$ est une fonction de base.

Exercice 2. Montrer que l'opération de différentiation $\mathcal{D}^\beta \varphi(x)$ est continue de D dans D.

Indications. 1) Considérer une suite $(\varphi_k(x))$ de fonctions de base et utiliser la déf 3. (Convergence).

2) Montrer que l'opérateur $\mathcal{D}^\beta$ est continu de D dans D.

Exercice 3. Prouver que $D(\mathbb{R})$ est dense dans $L_1(\mathbb{R})$, où $L_1(\mathbb{R})$ est l'espace de Lebesgue.