Université Ibn Khaldoun Tiaret.
Département des Mathématiques
Faculté de Mathématiques et Informatique

$2^{\text{ème}}$ anné Master L.M.D. AFED (Maths)
Année universitaire : 2020-2021
Le 28-04-2021

Correction de l'examen degré Topologique

Exercice1 :

Soit Ω l'intérieur du domaine du plan limité par le carré défini par les droites $y = x + 1,\ y = x - 1,\ y = -x + 1,\ y = -x - 1$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (|x| + |y|, 0)$

(1) (i) **(1 points)**

(ii) Calculons $f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2})$ **(1 points)**

$$\begin{aligned} (x,y) \in f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}) &\Leftrightarrow f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow (|x|+|y|,0) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow |x|+|y| = 0 \\ &\Leftrightarrow (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

(iii) Montrons que $f(\partial\Omega)$ est une constante **(3 points)**

$$\begin{aligned} (x',y') \in f(\partial\Omega) &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega\ f(x,y) = (x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega\ (|x|+|y|,0) = (x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega \begin{cases} (|x|+|y|,0) = (x',y'), & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ (|x|+|y|,0) = (x',y'), & x \geq 0,\ y \leq 0 \\ (|x|+|y|,0) = (x',y'), & x \leq 0,\ y \geq 0 \\ (|x|+|y|,0) = (x',y'), & x \leq 0,\ y \leq 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega \begin{cases} (x+y = x', y' = 0), & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ (x-y = x', y' = 0), & x \geq 0,\ y \leq 0 \\ (-x+y = x', y' = 0), & x \leq 0,\ y \geq 0 \\ (-x-y = x', y' = 0), & x \leq 0,\ y \leq 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x',y') = (1,0) \end{aligned}$$

Donc

$$f(\partial\Omega) = (1,0).$$

(2) **(1 points)**

Proposition 0.0.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application dans $C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ si $y_0 \notin f^{-1}(y_0)$ et $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$ alors*

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega,y_0)$$

(3) On considère alors la fonction constante définie par $g(x,y) = (1,0)$, alors $g(x,y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y) \in \Omega$ et donc $deg(f,\Omega,0) = deg(g,\Omega,0) = 0$ car $g(x,y) = (0,0)$ n'a pas de solution dans Ω (ni ailleurs, d'ailleurs). (**2 points**)

(4) Il suffit simplement d'ennoncer que la fonction $(x,y) \to (|x|+|y|,0)$ n'est pas differentiable au point $(0,0)$. (**2 points**)

Exercice2 :

Soit $\Omega =]-1,1[^2$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x - y^3, x)$

(1) Calculons $f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2})$ (**2 points**)

$$\begin{aligned} (x,y) \in f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}) &\Leftrightarrow f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow (x - y^3, x) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Donc
$$f^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
et $J_f(x,y) = |Df(x,y)| = \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$J_f(0,0) = |Df(0,0)| = (0,0)$ donc le point $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point singulier.

(2) Montrons que $f(\partial\Omega)$ est un quadrilaterre limité par les droites $y = -1,\ y = 1,\ y = x+1,\ y = x-1$ (**2points**)

$$\begin{aligned} (x',y') \in f(\partial\Omega) &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega \ f(x,y) = (x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega \ (x - y^3, x) = (x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \partial\Omega \begin{cases} (x-y^3,x) = (x',y'), & y = -1 \\ (x-y^3,x) = (x',y'), & y = 1 \\ (x-y^3,x) = (x',y'), & x = 1 \\ (x-y^3,x) = (x',y'), & x = -1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{ \ y' - x' = -1 \vee y' - x' = 1 \vee y' = 1 \vee y' = -1. \end{aligned}$$

(3) Montrons que le point $(0, -\frac{1}{2})$ est un point régulier (**1 points**)

$J_f(0, \frac{-1}{2}) = |Df(x,y)| = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $J_f(0, \frac{-1}{2}) = \frac{3}{4}$

le point $(0, \frac{-1}{2})$ n'appartenant pas à $f(\partial\Omega)$.

(4) Deduisons la valeur du degré topologique au point $0_{\mathbb{R}^2}$, $(deg(f,\Omega,0_{\mathbb{R}^2})) = 1$. (**1 points**)

(5) On se propose une deuxième methode pour calculer le degré topologique au point $0_{\mathbb{R}^2}$, on considère la fonction g définie par

$$g(x,y) = (x - y^3 + y\ \epsilon^2, x)$$

(i) Détèrminons l'image réciproque de $0_{\mathbb{R}^2}$ par g $(g^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}))$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in g^{-1}(0_{\mathbb{R}^2}) \quad &\Leftrightarrow \quad g(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x - y^3 + y\ \epsilon^2, x) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (0,\epsilon) \vee (x,y) = (0,-\epsilon).
\end{aligned}
$$

(**1points**)

(ii) Calculons le Jacobien en chaque point de cette image

$$
J_g(x,y) = |Dg(x,y)| = \det \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 + \epsilon^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Donc

$$
J_g(0,0) = -\epsilon^2,\ \ J_f(0,\epsilon) = 2\epsilon^2\ \ J_f(0,-\epsilon) = 2\epsilon^2
$$

le $\deg(g, \Omega, 0_{\mathbb{R}^2}) = 1.$ (**3 points**)