Université Ibn Khaldoun. Tiaret. Master 1.
Année universitaire : 2019-2020
Département de Mathématiques

$\boxed{\text{TD 1 : Topologie et Analyse fonctionnelle}}$ [1]

Exercice 1 *Soit $1 \leq p < \infty$. On note respectivement*

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ telles que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ telles que } \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n| < \infty\},$$

ℓ^p et ℓ^∞ sont munis des normes respectives

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|.$$

1) *Montrer que ℓ^p et ℓ^∞ sont des espaces de Banach.*
2) *Montrer que si $1 \leq< q \leq \infty$, alors $\ell^p \subset \ell^q$ et $\|f\|_q \leq \|f\|_p$, $\forall f \in \ell^p$.*
3) *Soit $c_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, montrer que c_0 est un espace de Banach.*

Exercice 2 *Soit $E = C^1([-1,1])$ l'espace des fonctions complexes continûment dérivables sur $[-1,1]$.*

(1) *On munit E de la norme uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Banach (On pourra utiliser la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$).*
(2) *On munit E de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.*

Exercice 3 *Soit $E = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2;\ x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de $i\}$. Soit $F = \ell^2$, on note $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un élément arbitraire de F. On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $T_n : E \to F$ définie par*

$$T_n((x_i)_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } \quad i \neq n, \\ nx_n, & \text{si } \quad i = n. \end{cases}$$

On note $A = \{T_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_x = \{T_n x,\ T_n \in A\}$.

1) *Montrer que pour chaque $x \in E$, A_x est borné dans F, mais que A n'est pas borné dans $\mathcal{L}(E,F)$.*
2) *Expliquer pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique pas.*

1. Pour plus d'exercices consulter l'ouvrage : J. Charles, M. Mbekhta et H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : exercices corrigés. Dunod. 2010.

Solution. En utilisant la définition de T_n, il est facile de voir que $T_n x \to 0$ pour tout $x \in E$. Ceci montre que l'ensemble A_x est borné pour tout $x \in E$.

Montrons que $\|T_n\| = n$, en effet, clairement $\|T_n\| \leq n$.
D'autre part, soit e_n le vecteur de E dont seule la n-iéme composante est non nulle et vaut 1. $\|e_n\| = 1$ et $\|T_n e_n\| = n$. Donc $\|T_n\| \geq n$ et par conséquent $\|T_n\| = n$. Ce qui prouve que l'ensemble A n'est pas borné.

Explication : Le théorème de Banach-Steinhaus exprime que A est borné si chaque A_x est borné dès que E est un espace de Banach. On n'a pas ici les conclusions de ce théorème ; il en résulte que E n'est pas un espace de Banach.

Exercice 4 *Soient E un espace de Banach et $T : E \to \ell^\infty$ une application linéaire. Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ la forme linéaire continue définie par*

$$f_n(x) = x_n, \quad \textit{pour tout } \; x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty.$$

Montrer que T est continue si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue de E dans $\mathbb{K}$.

Solution. Comme pour tout $n \geq 0$, f_n est une forme linéaire continue sur l^∞, il en résulte que si T est continue, alors : $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue.

Réciproquement, supposons que pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue. Pour chaque $x \in E$, on a

$$|f_n \circ T(x)| = |f_n(Tx)| \leq \|T(x)\|_\infty.$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in E$, on ait

$$|f_n \circ T| \leq M\|x\|.$$

D'où pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\infty &= \sup_{n \geq 0} |f_n \circ T(x)| \\ &\leq M\|x\|. \end{aligned}$$

Donc T est continue.