TD Logique propositionnelle.

Exercice 1

Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les

affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.

2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.

3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.

4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Questions

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles

2. Que peut on en déduire sur qui commande un dessert ?

3. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre a-rmations ?

Correction :

1. On introduit des variables propositionnelles a, b et c qui représentent le fait que Albert (a), Bernard (b) et Charles (c) prennent un dessert. On traduit ainsi le problème :

1. $a \implies b$

2. $(b \wedge \neg c) \vee (\neg b \vee c)$

3. $a \vee c$

4. $c \implies a$

2. On peut faire une table de vérité pour regarder tous les modèles possibles :

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(b \wedge \neg c) \vee (\neg b \vee c)$	$a \vee c$	$c \Rightarrow a$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V

La seule interprétation qui rend vrai les quatre affirmations correspond à la deuxième ligne dans laquelle Albert et Bernard commandent un dessert mais pas Charles.

Par contre si on relache l'une des contraintes alors il y a à chaque fois un deuxième modèle qui apparaît.

On ne peut donc conclure.

Exercice 2

Soit la formule F définie comme $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$.

1. Donner la table de vérité de la formule F .

2. Dire si la formule est valide, satisfiable, insatisfiable ?

3. La formule F a-t-elle un modèle ? si oui lequel ?

4. Donner la forme normale conjonctive et la forme normale disjonctive de la formule F.

Correction :

1. *Table de vérité :*

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \vee \neg p)$
–	–	V			V
F	–	F			V
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F

2. *La formule n'est pas valide (une ligne de la table de vérité où elle est fausse), elle est satisfiable (une ligne où elle est vraie) et donc elle n'est pas insatisfiable.*
3. *La formule a plusieurs modèles, par exemple* $\{p \mapsto V ; q \mapsto V ; r \mapsto V\}$
4. *Forme normale conjonctive qui exprime que l'on n'est pas sur la ligne où la valeur de la formule est fausse :* $\neg p \vee q \vee r$. *C'est aussi une forme normale disjonctive (parmi d'autres).*

Exercice 3

Connecteur de **Sheffer**. On définit le connecteur de **Sheffer** noté **|** (barre de Sheffer, ou encore

NAND) par : $p \mid q = \neg(p \wedge q)$

1. Donner la table de vérité de la formule $p \mid q$

2. Donner la table de vérité de la formule $((p \mid q) \mid (p \mid q))$

3. On veut maintenant exprimer les connecteurs usuels en utilisant la barre de **Sheffer**, et rien qu'elle.

(a) Donner la table de vérité de la formule $(p \mid q)$ et en déduire que le connecteur : peut être défini en n'utilisant que la barre de **Sheffer**.

(b) Trouver une formule équivalente à $p \vee q$, qui n'utilise que la barre de **Sheffer** (éventuellement plusieurs fois).

(c) Trouver une formule équivalente à $p \Rightarrow q$, qui n'utilise que la barre de **Sheffer** (éventuellement plusieurs fois).

Correction :

1.

p	q	$(p\|q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	V	V

2. *on retrouve la table de vérité de* $p \wedge q$.

p	q	$(p\|q)\|(p\|q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	V	F

3. (a) *On peut poser* $\neg p = (p|p)$

p	$(p\|p)$
V	F
F	V

   (b) *on a* $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv (\neg p|\neg q)$ *on en déduit un codage de* $p \vee q$ *qui est :* $(p|p)|(q|q)$

   (c) *on a* $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv p|\neg q$ *et donc on en déduit un codage de* $p \Rightarrow q$ *qui est :* $p|(q|q)$