Module : Theorie d'approximation

Première partie : Approximation Uniforme

I. INTRODUCTION.

La theorie d'approximation est une branche des mathématiques où l'on étudie la possibilité d'une réprésentation approximative de certains objets mathématiques (par exemple des fonctions) par d'autres plus simples (par exemple les polynômes), ainsi que des questions sur l'estimation de l'erreur introduites dans ces cas.

On observe qu'une grande partie de cette théorie est dédiée à l'approximation de certaines fonctions par d'autres.

Par ~~Exemples~~, parfois au lieu de calculer $\sin x$, on utilise la formule $\sin x \simeq x$ (plus x est grand, plus l'erreur est importante).

Quelques formules de calculs approximatifs de certaines fonctions (exple de la fonction racine), ou de quelque constante (exple la constante π) sont connues bien avant dans l'histoire.

La théorie contemporaine (moderne) de l'approximation a debuté depuis l'apparition de certains travaux du mathématicien russe en 1857 ; il s'interessait aux polynômes (c'est ce qu'on va voir en détails dans les prochains cours).

Aussi on peut citer le théorème de Weierstrass-Stone qui fait partie de la théorie classique d'approximation.

On commence par considérer les théorèmes (02 théorèmes) de Weierstrass.

II) Theorèmes de Weierstrass.

L'une des question principales que l'on se pose lors de l'étude de l'approximation uniforme est la suivante :

Est-ce qu'on peut approximer une fonction arbitraire continue (sur un intervalle [par exemple) par un polynôme algébrique de degré de précision donné à l'avance ?

La réponse à cette question fût donnée en 1855 par Weierstrass.

Theoreme 1. Soit $f(x)$ une fonction definie sur $[a,b]$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un tel polynôme $P(x)$ tel que $\forall x \in [a,b]$, on a

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon .$$

—o—

De nos jours, il existe un grand nombre de preuves différentes concernant ce théorème dit 1er théorème de Weierstrass.

Dans ce qui suit on adopte la méthode suivante pour démontrer ce théorème; on applique un autre théorème connu en analyse sous le nom du théorème de Bernstein.

Définition 1. Soit $f(x)$ une fonction finie definie sur $[a,b]$. Le polynôme

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad (1)$$

est appelé polynôme de Bernstein.

On aura besoin des lemmes suivants.

Lemmes 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$ (2)

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$ (3)

Preuve. On prouve (2).

Soit la formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \qquad (*)$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Dans $(*)$ on pose : $a = x$, $b = 1-x$, d'où on aura (2).

Maintenant dans $(*)$ on pose $a = z$, $b = 1$, alors

$$(z+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k \qquad (**)$$

On dérive $(**)$ par rapport à z, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^{k-1} = n(z+1)^{n-1}$$

ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^k = nz(z+1)^{n-1}.$ (4)

Dans le prochain cours on terminera la preuve
(Essayer de terminer vous même la preuve comme exercice).