Correction d'examen - Mars 2021

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t, y) = 2te^{-t^2} + \frac{y^5}{1+y^4}\cos(te^y).$$

La fonction f est bien définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que l'équation $y = f(t, y)$ admet une unique solution maximale $\phi : I =]T_-, T_+[\to \mathbb{R}$ avec $0 \in I$. [4pt]

2. Soit $t \in [0, T_+[$. On a $\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)ds = 1 + \int_0^t f(s, \phi(s))ds$. Il sen suit que

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\leq 1 + \int_0^t 2se^{-s^2}ds + \int_0^t \frac{|\phi(s)|^5}{1+|\phi(s)|^4}ds \\ &\leq 1 + [-e^{-s^2}]_0^t + \int_0^t |\phi(s)|ds \text{ puisque } \frac{|\phi(s)|^5}{1+|\phi(s)|^4} \leq |\phi(s)| \\ &\leq 2 + \int_0^t |\phi(s)|ds. \end{aligned}$$

Si $t \in]T_-, 0]$ alors le même calcul donne $\left|\int_t^0 f(s, \phi(s))ds\right| \leq 1 + \int_t^0 |\phi(s)|ds$. [6$pt$]

3. C'est une simple application du lemme de Gronwall. [6pt]

4. On raisonne par l'absurde. Supposons par exemple que $0 < T_+ < +\infty$ alors on a forcément $\lim_{t\to T_+} |\phi(t)| = +\infty$ Or $\lim_{t\to T_+} e^{|t|}$ est finie, ce qui est absurde d'après l'inégalité de la question 3. [4pt]