Chapitre 1

Généralités

Le but de ce chapitre est de mettre en place les définitions et les notations que nous allons utiliser.

1.1 Définitions

Soient U un ouvert de $I\!\!R \times I\!\!R^n$ et $f : U \to I\!\!R^n$ une application continue.

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre l'équation*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)),\ (t, y) \in U, \tag{1.1}$$

où y est un vecteur de $I\!\!R^n$ de variable t

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2 *Soient $I \subset I\!\!R$ et f une fonction continue de $I \times I\!\!R^n$ dans $I\!\!R$. On appelle équation différentielle d'ordre n l'équation*

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{(1)}, ..., y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Remarque 1.1 *On peut passer facilement de l'équation (1.2) à un système de type (1.1) en posant*

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ y^{(2)} \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n)} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \\ . \\ . \\ . \\ \dot{y}_{n-1}(t) = y_n(t) \\ \dot{y}_n(t) = f(t, y_1, ..., y_{n-1})) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

On remarquera que (1.2) et (1.3) sont équivalents dans ce cas.

Définition 1.3 *Une solution de (1.1) sur l'intervalle $I \subset I\!R$ est une fonction dérivable $y : I \to I\!R^n$ telle que*

i) $(\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U$,

ii) $(\forall t \in I) \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 1.2 *l'inconnue de l'équation (1.1) est donc une fonction. Le qualificatif ordinaire pour l'équation (1.1) signifie que la fontion inconnue y dépend d'une seule variable t, l'orsqu'il y a plusieurs variables t_i et plusieurs dérivées $\dfrac{\partial y}{\partial t_i}$, on parle d'équations aux dérivées partielles.*

Définition 1.4 *Soit* $\Omega \subset I \times I\!\!R^n$.

• *Lapplication* f *est dite lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur* Ω *s'il existe une constante* k, *appelée la constante de Lipschitz de* f, *telle que :*

$$\forall x \in I, \forall y, z \in I\!\!R^n, \|f(x,y) - f(x,z)\| \leq k\|y - z\|.$$

• *L'application* f *est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si tout point de* $I \times I\!\!R^n$ *admet un voisinage* Ω *sur lequel* f *est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.*

• *L'application* f *est dite globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur* $I \times I\!\!R^n$.

• *L'application* f *est contractante si* f *est lipschitzienne de rapport* $k < 1$.

1.2 Problème de Cauchy.

Etant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to R^n$ de (1.1) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

$\diamondsuit$ On dit que (t_0, y_0) sont les données initiales du problème de Cauchy.

$\diamondsuit$ Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une courbe intégrale de (1.1) passant par un point donné $(t_0, y_0) \in U$.

1.3 Champ des tangentes

A tout point $M = (t_0, y_0)$, on associe la droite (D_M) passant par M et de coefficient directeur $f(t_0, y_0)$:

$$(D_M) \ : \ y - y_0 = f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

$\diamondsuit$ L'application $M \to (D_M)$ est appelée champ des tangentes associé à l'équation (1.1).

$\diamondsuit$ Une courbe intégrale de (1.1) est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite (D_M) du champ des tangentes.

1.4 Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement aux sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.5 *Soient $y : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (1.1). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$*

Définition 1.6 *On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ et $I \subset \tilde{I} (I \neq \tilde{I})$.*

Théorème 1.1 *Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

Démonstration :
Supposons $I = [a, b]$ et y définie sur I. Il suffira de montrer que y se prolonge en une solution $\tilde{y} : [a, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ ($\tilde{b} \geq b$) maximale à droite, c'est à dire qu'on ne pourra plus prolonger $\tilde{y}$ au delà de $\tilde{b}$. Le même raisonnement s'appliquera à gauche.
Pour cela on construit par récurrence des prolongements successifs $y_1, y_2 ... y_k$ de y avec $y_k : [a, b_k] \to \mathbb{R}^n$. On pose $y_1 = y, b_1 = b$. Supposons y_{k-1} déjà construite pour $k \geq 1$. On pose

$$c_k = \sup\{c : y_{k-1} \text{ se prolonge sur } [a, c[\}.$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Par définition de la borne supérieure, il existe b_k tel que $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ est un prolongement $y_k : [a, b_k] \to \mathbb{R}^n$ de y_{k-1} avec b_k arbitrairement voisin de c_k, en particulier on peut choisir

$$\begin{aligned} c_k - b_k &< \frac{1}{k} \quad \text{si} \quad c_k < +\infty; \\ b_k &> k \quad \text{si} \quad c_k = +\infty. \end{aligned}$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongement de y_{k-1} contient l'ensemble des prolongements de y_k, au niveau des bornes supérieures on a donc $c_{k+1} \leq c_k$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 ... \leq b_k \leq ... \leq c_k \leq c_{k-1} \leq ... \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

$$\tilde{b} = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k.$$

Soit $\tilde{y} : [a, \tilde{b}] \to I\!R^n$ le prolongement commun des solutions y_k, éventuellement prolongé au point $\tilde{b}$ si cela est possible. Soit $z : [a, c] \to I\!R^n$ un prolongement de $\tilde{y}$. Alors z prolonge y_{k-1} et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \tilde{c}$, ce qui motre que la solution $\tilde{y}$ est maximale à droite.

1.5 Solutions globales

On suppose ici un ouvert U de la forme $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de $I\!R$ et Ω un ouvert de $I\!R^n$.

Définition 1.7 *Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.*

Remarque 1.3 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple : Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad \dot{y} = y^2 \ \ sur \ \ U = I\!R \times I\!R.$$

Cherchons les soluions $t \to y(t)$ de (E).

$\diamondsuit$ On a d'une part la solution $y(t) = 0$.

$\diamondsuit$ Si y ne s'annule pas, (E) s'écrit

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = 1,$$

d'où par intégration

$$y(t) = -\frac{1}{t + C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $]-C, +\infty[$, ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (E).

1.6 Régularité des solutions

Définition 1.8 *Une fonction de plusieurs variables est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.*

Théorème 1.2 *Si la fonction $f : U \to I\!R^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$, toute solution de l'équation $\dot{y} = f(t, y)$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.*

Démonstration
On raisonne par récurrence sur k.
i) Si $k = 0$ alors f est continue.
Par hypothèse $y : I \to I\!R^n$ est dérivable, donc continue.
Par conséquent $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ est continue, donc y est de classe $\mathcal{C}^1$.
ii) Si le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors y est au moins de classe $\mathcal{C}^k$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^k$, il s'ensuit que $\dot{y}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Donc y est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Chapitre 2

Théorème d'existence de solutions

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité du problème de Cauchy, l'étude est basé sur le théorème du point fixe de Picard suivant.

2.1 Théorème du point fixe

Définition 2.1 *Soit (E, d) un espace métrique complet et $\phi : E \to E$ une application continue. On dit que $a \in E$ est un point fixe de ϕ si $\phi(a) = a$.*

Définition 2.2 *On dit que ϕ est contractante si ϕ est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est à dire s'il existe $k < 1$ tel que*

$$\forall x, y \in E, \ \ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Théorème 2.1 *Soit $\phi : E \to E$ une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même. Alors ϕ admet un point fixe unique $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée (x_p) définie par*

$$x_{p+1} = \phi(x_p)$$

converge vers a.

Démonstration :
Unicité du point fixe.
Soient a, b deux points fixe de ϕ tels que $a \neq b$, alors

$$d(\phi(a), \phi(b)) = d(a, b) \quad \text{et} \quad d(a, b) \neq 0,$$

d'où ϕ n'est pas contractante, donc contradiction.
Existence du point fixe.
Soit $x_0 \in E$ un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d(\phi(x_{p-1}), \phi(x_p)) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p) \end{aligned}$$

d'òu par récurrence

$$d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1).$$

Pour tout entier $q > p$ nous avons

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l+1}) \\ &\leq d(x_0, x_1) \sum_{l=p}^{q-1} k^l \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{+\infty} k^l = \frac{k^p}{1-k}.$$

On a donc

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall p > q$$

ce qui montre que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est un espace complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$. L'égalité

$$x_{p+1} = \phi(x_p)$$

et la continuité de ϕ impliquent que $a = \phi(a)$.

2.2 Equivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale

On considère une équation différentielle

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{E}$$

où $f : U \to I\!R^n$ est une fonction continue et U est un ouvert de $I\!R \times I\!R^n$.

Le lemme suivant montre que la résolution de (E) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale.

Lemme 2.1 *Une fonction* $y : I \to I\!R^n$ *est une solution du problème de Cauchy de données initiales* (t_0, y_0) *si et seulement si*

(i) y *est continue et* $(t, y(t)) \in U,\ \forall t \in I$;

(ii) $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du,\ \forall t \in I.$

Démonstration :
Si y vérifie (i) et (ii) alors y est différentiable et on a

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } \dot{y}(t) = f(t, y(t)).$$

Inversement, D'après la définition 1.3 y est une solution de l'équatéion (E) si y est dérivable et

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)$$

donc (ii) s'en déduit par intégration.

2.3 Cylindres de sécurité

Pour résoudre l'équation différentielle (E), on va chercher à construire des solutions de l'équation intégrale (ii), et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point $(t_0, y_0) \in U$ ne peut s'éloigner de y_0.

Comme U est supposé ouvert, il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$$

de longueur $2T_0$ et de rayon r_0 assez petit, tel que $C_0 \subset U$. L'ensemble C_0 est fermé borné dans $I\!R^{n+1}$, donc compact. Donc f est bornée sur C_0, c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y)\in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty.$$

Soit

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$$

un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi-longueur $T \leq T_0$.

Définition 2.3 *On dit que* C *est un cylindre de sécurité pour l'équation* (E) *si toute solution* $y : I \to I\!R^n$ *du problème de Cauchy* $y(t_0) = y_0$ *avec* $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ *reste contenue dans* $\overline{B}(y_0, r_0)$.

Corollaire 2.1 *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M}).$$

Remarque 2.1 *Si $C \subset C_0$ est un cylindre de sécurité, toute solution du problème de Cauchy*

$$y : [t_0 - T, t_0 + T] \to I\!R^n$$

vérifie

$$\|\dot{y}(t)\| \leq M,$$

donc y est lipschitzienne de rapport M.

2.4 Théoréme d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section, on va étudier l'unicité de la solution locale. La condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Cauchy-Lipschitz que si f soit localement lipschitzienne (par rapport à la deuxième variable) alors l'unicité de la solution est assurée.

Supposons alors que f est une fonction localement lipschitzienne en y, cela signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$$

et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne en y sur C_0

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0, \ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Remarque 2.2 *Pour que f soit localement lipschitzienne en y sur U, il suffit que f admette des dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $1 \leq i, j \leq n$ continues sur U.*

Théorème 2.2 *(Cauchy-Lipschitz)*
Si $f : U \to I\!R^n$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0),$$

le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.

Démonstration :
Soit
$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$$
avec
$$T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$$
un cylindre de sécurité pour (E). Notons par
$$\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$$
l'ensemble des applications continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$, muni de la distance d de la convergence uniforme. C'est un espace complet. A toute fonction $y \in \mathcal{F}$, associons la fonction $\Theta(y)$ définie par
$$\Theta(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du, \ t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$
D'après le Théorème 2.1, y est une solution du problème (E) si et seulement si y est un point fixe de Θ. Donc on va essayer d'appliquer le théorème du point fixe.

- Nous avons

$$\begin{aligned} \|\Theta(y)(t) - y_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du\| \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq MT \leq r_0, \end{aligned}$$

donc $\Theta(y) \in \mathcal{F}$, donc l'opérateur Θ envoie $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

- Soient maintenant $y, z \in \mathcal{F}$ et

$$y_{(p)} = \Theta^p(y),$$
$$z_{(p)} = \Theta^p(z).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t} (f(u, y(u)) - f(u, z(u)))du\| \\ &\leq |\int_{t_0}^{u} k\|y(u) - z(u))\|du| \\ &\leq k|t - t_0|d(y, z). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\|y_{(2)}(t) - z_{(2)}(t)\| &\leq |\int_{t_0}^{t} k\|y_1(u) - z_1(u))\|du| \\
&\leq |\int_{t_0}^{t} k.k|t-t_0|d(y,z)du| \\
&= k^2 \frac{|t-t_0|^2}{2} d(y,z).
\end{aligned}$$

Par récurrence sur p, on aura

$$\|y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)\| \leq k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} d(y,z);$$

en particulier

$$\begin{aligned}
d(\Theta^p(y), \Theta^p(z)) &= d(y_{(p)}, z_{(p)}) \\
&\leq \frac{k^p T^p}{p!} d(y,z)
\end{aligned}$$

d'où Θ^p est lipschitzienne de rapport $\dfrac{k^p T^p}{p!}$ sur $\mathcal{F}$. D'autre part

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{k^p T^p}{p!} = 0,$$

alors, il existe un p assez grand tel que $\dfrac{k^p T^p}{p!} < 1$, pour une telle valeur de p, Θ^p est une application contractante de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

• Et comme $\mathcal{F}$ est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe montre que Θ admet un point fixe unique y.

2.5 Unicité globale

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale.

Théorème 2.3 *Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \to I\!R^n$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzienne en y. Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I, alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I.*

Démonstration :
Supposons $y_{(1)}(t_0) = y_{(2)}(t_0)$ en un point $t_0 \in I$. Montrons par exemple que $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \geq t_0$. S'il n'en est pas ainsi, considérons le premier instant $\tilde{t}_0$ où $y_{(1)} \neq y_{(2)}$,

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \in I : \ t \geq t_0 \text{ et } y_{(1)}(t) \neq y_{(2)}(t)\}$$

On a par définition $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \in [t_0, \tilde{t}_0[$ et par continuité il s'ensuit que $y_{(1)}(\tilde{t}_0) = y_{(2)}(\tilde{t}_0)$. Soit $\tilde{y}_0$ ce point et soit

$$\tilde{C} = [\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}] \times \overline{B}(\tilde{y}_0, \tilde{r}_0)$$

un cylindre de sécurité de centre $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$. Le théorème d'unicité locale implique que $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur $[\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}]$, ce qui contredit la définition de $\tilde{t}_0$. D'où l'unicité.

Corollaire 2.2 *Si f est localement lipschitzienne en y sur U, pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il passe une solution maximale $y : I \to I\!R^m$ et une seule.*

Exemple 1.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ f(t, y) = \frac{\cos t}{1+e^y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On calcul la dérivée partielle de f par rapport y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{-e^y \cos t}{(1+e^y)^2}?$$

et comme $|\cos x| \leq 1, \ \forall x \in I\!R$, alors

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)| = |\frac{-e^y \cos t}{(1+e^y)^2}| < \frac{e^y}{1+e^y}$$

Et on a $\dfrac{e^y}{1+e^y} < 1$ donc, on conclut que

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)| < 1 < +\infty.$$

Comme f vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale sur l'intervalle $[-T,+T]$ avec $(-T,+T) \in I\!R^- \times I\!R^+$.

Le fait que l'intervalle maximale I soit ouvert découle du fait que toute solution sur un intervalle non ouvert se prolonge. Si y est une solution de (E) avec condition initiale (t_0, y_0) sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, alors elle est prolongeable sur un intervalle $I \supset [a,b[$ en lui raccordant une solution de (E) avec condition initiale $(a, y(a))$. Ici, il n'y a pas unicité de la solution maximale :

Exemple 2.
Soit l'équation

$$y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}.$$

Le problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = 0$ admet alors au moins deux solutions maximales :

$$y_{(1)}(t) = 0 \text{ et } y_{(2)}(t) = t^3 \text{ avec } t \in I\!R$$

Condition suffisante d'existence de solutions globales.

Ce qui suit est une condition d'existence utile pour les solutions globales, reposant sur une hypothse de Lipschitz (semi-globale) de $f(t,y)$ relativement à y. On peut montrer que cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

Théorème 2.4 *Soit $f : U \to I\!R^n$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times I\!R^n$, où $J \subset I\!R$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \to I\!R^+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t,y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $I\!R^n$. Alors l'unique solution maximale de l'équation $\dot{y} = f(t,y)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).*

Exercice 1. Montrer que toute solution maximale de l'quation différentielle

$$\dot{y} = t\sqrt{t^2 + y^2}, (t,y) \in I\!R \times I\!R,$$

est globale.

Exercice 2. On définit $f : I\!R \to I\!R$ par

$$f(y) = \begin{cases} e, \text{ si } y \leq e \\ y \ln y \text{ si } y \geq e \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.
2) Déterminer explicitement les solutions maximales de l'équation $y_0 = f(t,y)$.
3) La condition suffisante du théorème précédent est-elle nécessaire ?