Chapitre 1

Théorème d'existence et d'unicité

1.1 Existence et unicité de la solution

On note $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et $D = I \times \omega$ où I est un ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et $f : D \to E$ une fonction continue. Pour tout $(t, x) \in D$, on notera $f(t, x) = (f_1(t, x), ..., f_n(t, x))$ où chaque fonction f_i est continue de D dans $\mathbb{R}$. Dans ce cours, on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

où

$$\dot{x}(t) \ = \frac{dx}{dt}(t).$$

Commençons par préciser la notion de solution pour ce type d'équation.

Définition 1.1. *Une solution de (1.1) est un couple (φ, J) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_2)$ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout t de J et*

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi(t)),\ \forall i = 1, ..., n \text{ et } \forall t \in J..$$

Par composition, On remarque rapidement que puisque f et φ sont deux fonctions continues, alors φ' est également continue sur J et φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

Définition 1.2. *Soit $(t_0, x_0) \in D$. Résoudre le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

consiste à déterminer un couple (φ, J) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et φ une fonction dérivable de J dans E telle que $(t, \varphi(t)) \in D$ pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

En intégrant l'équation différentielle ordinaire du problème de Cauchy (1.2) entre t_0 et t et en tenant compte de la condition $x(t_0) = x_0$, on obtient

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \tag{1.3}$$

où
$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s, \varphi(s))ds, ..., \int_{t_0}^{t} f_n(s, \varphi(s))ds \right).$$

Réciproquement, toute fonction vérifiant (1.3) est bien une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (1.2).

Théorème 1.3. *[3] (Cauchy-Peano-Arzela) Soit $(t_0, x_0) \in D$ et soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que le cylindre $C = \{(t, x) \in D\,;\ |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b\}$ soit inclus dans D. On note*

$$M = \underset{(t,x)\in C}{sup} \|f(t, x)\|_E \ \ et\ \alpha \leq min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

alors il existe une solution φ au problème de Cauchy (1.2) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$.

On peut énoncer le théorème précédent sous la forme simplifiée suivante :

Corollaire 1.4. *Soit $f \in \mathcal{C}(D)$ (la fonction f est continue sur D). Alors pour tout $(t_0, x_0) \in D$, il existe un voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ sur lequel le problème de Cauchy (1.2) admet une solution.*

On a besoin des deux définitions suivantes :

Définition 1.5. *On dira que f est lipschitzienne en x et on notera $f \in Lip(D)$, s'il existe $k > 0$ tel que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq k \|x_1 - x_2\|_E\,, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

Définition 1.6. *On dit que f est localement lipschitzienne sur D si pour tout $(t, x) \in D$ il existe un cylindre $B = \{(t', x') \in D,\ \|x - x'\|_E < \varepsilon_1, |t - t'| < \varepsilon_2\} \subset D$ et une constante $k > 0$ telles que f soit lipschitzienne sur B . On note $f \in Lip_{loc}(D)$.*

Le théorème suivant assure, en plus de l'existence locale de la solution du problème de Cauchy, l'unicité de celle-ci dès que la condition de Lipschitz est satisfaite.

Théorème 1.7. *[3] (Cauchy-Lipschitz) Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$, il existe une unique solution au problème de Cauchy (1.2) sur l'intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Remarque 1.8. *Soit $f : I \times J \to E$ une fonction continue, où I et J sont des ensembles bornés de $\mathbb{R} \times E$. Une condition plus parlante que la condition de Lipschitz et qui implique l'inégalité de Lipschitz, est que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ pour i allant de 1 à n, existent et soient continues (les x_i, $i = 1, ..., n$, sont les composantes de x). En effet, les fonctions continues sur des ensembles bornés sont bornées. En appliquant ensuite le théorème des accroissements finis, on a pour tout (t, x_1), $(t, x_2) \in I \times J$,*

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| = M \|x_2 - x_1\|,$$

où M est tel que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq M, \; \forall x \in J, \; \forall i = 1, ..., n, \; \forall j = 1, ..., n$$

La condition de Lipschitz résulte alors du fait que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., n)$ sont bornées.

Le théorème suivant assure que lorsque la fonction $f \in Lip_{loc}(D)$, l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.2) est en fait globale ; ce qui peut se traduire par le fait que les graphes des deux solutions distinctes de (1.1) ne peuvent pas se croiser.

Théorème 1.9. *[3] (Unicité globale) Soit $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$ et soient (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (1.1) telles que $J_1 \cap J_2 \neq \phi$. S'il existe un point t_0 de $J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

1.2 Solutions maximales et prolongement des solutions locales

On a les trois définitions suivantes :

Définition 1.10. *Soit (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de (1.1). On dit que (φ_2, J_2) prolonge (φ_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ sur J_1.*

Définition 1.11. *Une solution* (φ, J) *de (1.1) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.*

Définition 1.12. *Une solution* (φ, J) *de (1.1) est dite globale si elle est définie sur* I *tout entier (i.e : si* $J = I$*).*

Le théorème suivant assure l'existence d'une solution maximale du problème de Cauchy :

Théorème 1.13. *[3] (Existence d'une solution maximale) Soit* $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$*. Alors par tout point* (t_0, x_0) *de* D*, il passe une unique solution maximale au problème de Cauchy (1.2).*

L'existence d'une solution globale est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.14. *[8] (Existence d'une solution globale) S'il existe une fonction continue* $k : I \to \mathbb{R}^+$ *telle que pour tout* t *fixé dans* J*, l'application* $y \mapsto f(t, y)$ *soit lipschitzienne de rapport* $k(t)$*, alors toute solution maximale de l'équation* $\dot{x} = f(t, x(t))$ *est globale.*

Les deux théorèmes qui suivent donnent des conditions suffisantes pour qu'une solution d'une équation différentielle ordinaire soit continue par rapport aux conditions initiales, et pour qu'une solution d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre soit continue par rapport à celui-ci.

Théorème 1.15. *[8] (Continuité des solutions par rapport aux conditions initiales) Si la fonction* f *est continue en* (t, x) *et localement lipschitzienne en* x*, la solution de (1.1) exprimée en fonction des conditions initiales*

$$\begin{aligned} x : \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\mapsto x(t, t_0, x_0) \end{aligned}$$

est continue, où $\Omega = J(t_0, x_0) \times D$ *avec* $J(t_0, x_0)$ *l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de conditions initiales* (t_0, x_0)*.*

Théorème 1.16. *[8] (Continuité des solutions par rapport à un paramètre) Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda)$$

où λ *est un paramètre de* $\mathbb{R}^k$*. Si* f *est localement lipschitzienne en* (x, λ) *et continue, alors la solution*

$$\begin{aligned} x : \Omega' &\to \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0, \lambda) &\mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda) \end{aligned}$$

est continue, où $\Omega' = J'(t_0, x_0, \lambda) \times D \times \mathbb{R}^k$*, avec* $J'(t_0, x_0, \lambda)$ *l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de conditions initiales* (t_0, x_0) *pour la valeur* λ *du paramètre.*

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1.1. *Donner un exemple d'équation différentielle ordinaire dont l'unicité de la solution n'est pas satisfaite.*

Solution 1.1. *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} \dot{y} &= y^{1/3} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

La fonction $y \mapsto y^{1/3}$ est continue. Sa dérivée n'est pas définie en zéro. Les conditions suffisantes du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont donc pas remplies. On vérifie que $y = 0$ et $y = \pm\sqrt{8/27}t^{3/2}$ sont des solutions du problème (1.4).

Exercice 1.2. *Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{4t^3x}{t^4+x^2}, \ si\ (t,x) \neq (0,0) \\ 0, \ si\ (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

et l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{1.5}$$

1. L'application f est-elle continue ? est-elle localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ?
Que peut-on en déduire pour l'équation (1.5) ?
2. Soit ϕ une solution de l'équation (1.5) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une nouvelle application ψ par $\phi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. // Déterminer une équation différentielle satisfaite par ψ, puis résoudre cette nouvelle équation.
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1.5) vérifiant la condition initiale $(t_0, x_0) = (0,0)$.

Solution 1.2. *1. Pour $(t,x) \neq (0,0)$, la fonction $\dfrac{4t^3x}{t^4+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'autre part,*

$$|f(t,x)| = 2|t|\frac{2t^2|x|}{(t^2)^2 + x^2} \leq |2t|$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{(t,x)\to(0,0)} f(t,x) = 0 = f(0,0).$$

D'où, f est continue en $(0,0)$.
Supposons que la fonction f est localement lipschitzienne au voisinage de $(0,0)$. Alors

$$\exists \alpha,\ \beta,\ k \in \mathbb{R},\ \forall t \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall x \in]-\beta, \beta[,\ |f(t,x) - f(t,0)| \leq k\,|x - 0|$$

Ceci signifie que

$$|\frac{4t^3 x}{t^4 + x^2}| \leq k|x|$$

C'est-à-dire,

$$\frac{4t^3}{t^4 + x^2} \leq k$$

En particulier, pour un certain $k_1 > k$

$$\frac{4}{t} \leq k,\ \forall t \in]0, \alpha[.$$

Ceci est absurde.
Le théorème de l'unicité des solutions des équations différentielles n'est donc pas appliquable pour l'équation différentielle (1.5).
2. On a

$$\psi(t) = \frac{1}{t^2}\phi(t)$$

En dérivant les deux membres, on obtient

$$\psi'(t) = \frac{1}{t^2}\phi'(t) - \frac{2}{t^3}\phi(t).$$

En remplaçant $\phi'(t)$ par sa valeur (puisque ϕ est une solution de l'équation différentielle (1.5)), on aura

$$\psi'(t) = \frac{4}{t^2}\frac{t^3\phi(t)}{t^4 + \phi(t)^2} - \frac{2}{t}\psi(t).$$

En exprimant le tout en fonction de ψ, on obtient la nouvelle équation différentielle

$$\frac{\psi'(t)\,(1 + \psi(t)^2)}{\psi(t)\,(1 - \psi(t)^2)} = \frac{2}{t}$$

La décomposition des fractions rationnelles en éléments simples donne

$$\psi'(t)\left(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1 - \psi(t)} - \frac{1}{1 + \psi(t)}\right) = \frac{2}{t}$$

En intégrant par rapport à t on obtient

$$\ln\left|\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)^2}\right| = \ln t^2 + c$$

où c est une constante de $\mathbb{R}$*. D'où*

$$\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)^2} = ct^2.$$

La résolution de l'équation du deuxième degré

$$ct^2\psi(t)^2 + \psi(t) - ct^2 = 0$$

aboutit à

$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2}.$$

D'où

$$\phi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}.$$

Ainsi, par la condition initiale $(t_0, x_0) = (0, 0)$*, il passe une infinité de solutions de l'équation différentielle (1.5).*

Exercice 1.3. *On considère l'équation différentielle*

$$\dot{y} = x + y^2 \tag{1.6}$$

Soit y une solution maximale définie sur un intervalle ouvert I.
1. Montrer que I est majorée.
2. On pose $b = \sup I$*.*
- *Montrer que y est croissante.*
- *Trouver la limite de y en b.*

Solution 1.3. *1. Supposons que I n'est pas majoré. Pour* $x \geq 1$*, on a* $\dot{y} \geq 1 + y^2$*. En integrant entre 1 et x, on obtient que*

$$\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geq x - 1.$$

Ceci est absurde puisque la fonction arctan *est bornée.*
2. Soient x_1*,* $x_2 \in I$ *tels que* $x_2 \geq x_1$*. En integrant (1.6) entre* x_1 *et* x_2 *on obtient*

$$y(x_2) = y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \dot{y}(s)ds.$$

C'est-à-dire,

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + \int_{x_1}^{x_2} y(s)^2 ds.$$

Il est clair que $y(x_2) - y(x_1) \geq 0$*, ce qui implique que* y *est croissante.*
3. La fonction y *est croissante au voisinage de* b*. Ceci signifie que* $\dot{y}(x)$ *est positif au voisinage de* b*. Comme*

$$y(x) = y(a) + \int_a^x \dot{y}(s) ds.$$

où $a \in I$*, et la solution* y *est maximale, on en déduit que*

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = +\infty.$$

car sinon, on peut prolonger y *en* b*, ce qui implique que la solution* y *n'est pas maximale.*