Université Ibn Khaldoun - Tiaret
Département de Mathématiques

Master 1 AFED
Équations différentielles -I-

Mars 2021

Contrôle

1. Écrire l'énoncé le théorème du point fixe de Banach. $[4pt]$
2. Donner la définition du problème de Cauchy. $[4pt]$
3. Soit $f(t,s) = t^2 + \frac{\varphi(t)}{s} + s;\ t, s \in [1, \infty[$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée.
   - Montrer que f est lipschitzienne par rapport à s. $[4pt]$
   - Montrer que f est localement uniformément continue par rapport à t. $[2pt]$

Examen

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = 2te^{-t^2} + \frac{y^5}{1+y^4}\cos(te^y) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution maximale $\phi : I =]T_-, T_+[\to \mathbb{R}$. $[4pt]$
2. En utilisant la formulation intégrale de (E) montrer que
$$|\phi(t)| \leq 2 + \int_0^t |\phi(s)| ds; \quad \forall t \in I. [6pt]$$
3. En déduire que
$$|\phi(t)| \leq 2e^{|t|}; \quad \forall t \in I. [6pt]$$
4. Montrer que $I = \mathbb{R}$. $[4pt]$

Indication La question 3. est une simple application du lemme de Gronwall.