Université Ibn Khaldoun. Tiaret
Département de Mathématiques

Le problème de Sturm-Liouville

Niveau M1

Ziane Mohamed

Année Universitaire 2020-2021

Préface

Ce manuscrit est la rédaction d'un cours de EDO2, qui a été enseigné pendant plusieurs années en Master de Mathématiques à Université de Tiaret. Il contient ce qu'il nous a paru possible et souhaitable de faire dans le temps imparti (sur un seul semestre).

Ce cours se compose de quatre chapitres. Chaque chapitre est subdivisé en sections et se termine par plusieurs exercices dont la plupart sont corrigés.

Les références citées en bibliographie ne sont pas toutes utilisées, elles sont données à titre d'information au lecteur qui désire en savoir plus. On n'a pas inclu un index spécifique aux notations, elles sont toutes définies au fur et à mesure de leur introduction.

Je remercie mes collègues (et mes étudiants) qui m'ont encouragé à rédiger ce cours et qui en ont relu certaines parties. J'accueillerai volontiers tous les commentaires et les corrections dont le lecteur voudra bien me faire part.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Généralités **7**
- 2.1 Espaces fonctionnels 7
- 2.2 Le problème de Cauchy 8

3 Le problème de Sturm-Liouville **9**
- 3.1 Propriétés 12
- 3.2 Alternative de Fredholm 16

4 La fonction de Green **17**
- 4.1 Fonction de Green 18

5 Travaux Dirigés **23**

Chapitre 1

Introduction

On étudiera les “solutions” du problème aux limites associés aux équations différentielles ordinaire (EDO) du second ordre de type (formel) :

$$Ly = f, \tag{1.1}$$

où L est un opérateur différentiel (linéaire) du second ordre défini sur un intervalle compact $[a, b]$ [1] de $\mathbb{R}$, f est une fonction continue sur $[a, b]$, à laquelle on ajoute des conditions supplémentaires dites conditions aux limites (aux bords-frontières) de la forme

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = \gamma_1, \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ et γ_j $(j = 1, 2)$ sont des constantes.

On est conduit donc à trouver toutes les fonctions $y \in C^2([a, b])$ ($:=$ l'espace des fonctions deux fois continûment dérivables à valeurs complexes) qui satisfait (1.1)-(1.2) simultanément.
Les conditions aux limites (1.2) sont dites homogènes si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Dans ce cas le problème aux limites peut être interprété comme étant la recherche des valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur différentiel $L : \mathcal{S} \to C([a,\, b])$ défini par

$$Ly = \lambda y, \tag{1.3}$$

1. Pour des raisons de simplicité, nous allons restreindre l'étude à l'intervalle fermé borné $[a, b]$ $(a < b)$ bien que la théorie ne se limite nullement dans ce cadre.

où $\mathcal{S}$ est le sous espace vectoriel de fonctions $C^2([a,b])$ qui vérifient les données aux bords homogènes, λ est un paramètre, l'équation (1.3) est ainsi écrite sous la forme $(L-\lambda I)y=0$ (I : désigne l'application identité).

Exemple 1.1 *Considèrons le problème linéaire homogène suivant*

$$\begin{cases} y''(t)+\lambda y(t)=0, & t\in[0,\pi],\\ y(0)=0 \text{ et } y(\pi)=0, \end{cases} \tag{1.4}$$

$\lambda\in\mathbb{R}$. *l'équation caractéristique est :* $r^2+\lambda=0$, *d'où la discussion suivante :*

- *Pour* $\lambda=0$ *et* $\lambda<0$, *le problème* (5.5) *admet (uniquement) la solution triviale* ($y\equiv 0$), *donc* $\lambda\leq 0$ *n'est pas une valeur propre.*
- *Pour* $\lambda>0$, *la solution générale de l'équation différentielle est donnée par*
$$y(t)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}t)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}t),$$
c_1,c_2 *sont des constantes arbitraires. Utilisons les conditions aux limites, on obtient*
$$0=y(0)=c_2,$$
$$0=y(\pi)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}\pi).$$
Donc, $c_1\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$. *Si :* $c_1=0$ *alors* $y(t)=0$ *est la solution triviale de* (5.5). *Si :* $c_1\neq 0$, *on a :* $\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$ *ce qui entraine que* $\sqrt{\lambda}\pi=k\pi,\ k=1,2,3,\ldots$.
Les valeurs propres sont donc $\lambda_k=k^2$ *telles que* $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots,$ $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k$ *avec* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty.$
Finalement, le problème (5.5) *admet une infinité de solutions et l'on a les fonctions propres correspondantes* $y_k(t)=\sin(kt)$.

On note maintenant par L l'opérateur $-\dfrac{d^2}{dt^2}$, *l'équation* $y''+\lambda y=0$ *s'écrit* $Ly=\lambda y$. *On munit l'espace* $C([a,\,b],\mathbb{R})$ *par le produit scalaire usuel*

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{\pi}f(t)g(t)\,dt$$

et

$$\mathcal{S}=\{y\in C([a,\,b],\mathbb{R})/y(0)=y(\pi)=0\}.$$

Si $y_1,\, y_2 \in \mathcal{S}$*, on a :* $y_1(0) = y_1(\pi) = y_2(0) = y_2(\pi) = 0$*, nous obtenons en intégrant par parties :*

$$\begin{aligned}
\langle Ly_1,\, y_2\rangle &= \int_0^\pi Ly_1(t)y_2(t)\,dt = -\int_0^\pi y_1''(t)y_2\,dt \\
&= -y_1'(t)y_2(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt \\
&= -(y_1'(\pi)y_2(\pi) - y_1'(0)y_2(0)) + \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle y_1,\, Ly_2\rangle &= \int_0^\pi y_1(t)Ly_2(t)\,dt = -\int_0^\pi y_1(t)y_2''(t)\,dt \\
&= -y_1(t)y_2'(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt \\
&= -(y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_1(0)y_2'(0)) + \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle Ly_1,\, y_2\rangle = \langle y_1,\, Ly_2\rangle$ *d'où* L *est symétrique*[2] *dans* $\mathcal{S}$.

Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre deux suivante :

$$-a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + (a_0(t) - \lambda\mu(t))y(t) = g(t), \tag{1.5}$$

où λ est une constante arbitraire, $a_2(t) > 0$ et $\mu(t) > 0$ pour tut $t \in [a,\, b]$. Posons :

$$p(t) = \exp\Big(-\int^t \frac{a_1(t)}{a_1(t)}\,dt\Big),\; q(t) = \frac{a_0(t)p(t)}{a_2(t)},\; \omega(t) = \frac{\mu(t)p(t)}{a_2(t)}$$

et $f(t) = \dfrac{p(t)g(t)}{a_2(t)}$.

2. i.e. auto-adjoint, hermitien. !

Multiplions l'équation (1.5) par $\dfrac{1}{a_2(t)}p(t)$, on obtient une équation de la forme

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right)+(q(t)-\lambda\omega(t))y(t)=f(t) \tag{1.6}$$

qui sera appelée *équation de Sturm-Liouville.*
On ajoute des conditions aux limites (séparés) du type [3]

$$\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=0, \tag{1.7}$$
$$\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=0, \tag{1.8}$$

$\alpha_{0,1}$, $\beta_{0,1}$ étant finis.

Le problème de Sturm-Liouville ont une interprétation, voir une origine physique, en effet le mouvement d'une corde vibrante non-homogène est modélisé par l'équation aux dérivées partielles.

3. la première faisant intervenir le point a et le second point b.

Chapitre 2

Généralités

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des résultats classiques sur les équations différentielles ordinaires.

2.1 Espaces fonctionnels

Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N} = 1, 2, \ldots$. On désigne par

(i) $C([a, b], \mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(ii) $C([a, b])$: l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.
(iii) $m \in \mathbb{N}$, $C^m([a, b])$ (resp. $C^m([a, b], \mathbb{R})$) l'espace des fonctions définies de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) m-fois continûment dérivables.

On munit l'espace $C^m([a, b])$ par la norme

$$\|f\|_{C^m} = \sup_{0\leq j\leq m} \|f^{(j)}\|, \quad \text{pour} \quad f \in C^m([a, b]) \text{ où } \|f^{(j)}\| = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(j)}(t)|.$$

Si : $f, g \in C^m([a, b])$ alors

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \Big(f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)} + \cdots + f^{(m)}(t)\overline{g^{(m)}(t)}\Big)\, dt$$

est un produit scalaire dans $C^m([a, b])$ et $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

(iv) Soit $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive ($\omega(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$). On note par $C_{L^2(\omega)}([a, b])$ l'espace vectoriel $C([a, b])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\omega(t)dt,$$

on a donc $\|f\|_\omega = \sqrt{\langle f, f\rangle_\omega}$.

2.2 Le problème de Cauchy

On considère l'équation différentielle suivante

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = a_3(t), \quad t \in [a, b], \tag{2.1}$$

avec la condition initiale

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

où y_1, y_2 sont des constantes.

Théorème 2.1 *Supposons que les fonctions $a_1(t)$, $a_2(t)$ et $a_3(t)$ sont continues sur $[a, b]$. Alors le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) admet une solution unique.*

Démonstration: Soit $v = y' \;\Rightarrow\; v' = y''$, nous avons

$$y''(t) = -a_1(t)y'(t) - a_2(t)y(t) + a_3(t), \tag{2.3}$$

l'équation différentielle (2.3) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$ et $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3(t) \end{pmatrix}$.

Posons $x = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$, il vient que

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t) + g(t), \\ x(t_0) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.4}$$

Le second membre de l'équation différentielle (2.4) est lipschitzien (puisque l'application $t \to A(t)$ est continue sur $[a, b]$). Le résultat découle donc immédiatement du théorème de Cauchy-Lipschitz.

$\blacksquare$

Chapitre 3

Le problème de Sturm-Liouville

On considère l'opérateur de dérivation (linéaire) du second ordre

$$L_\lambda[y] = -(p(t)y'(t))' + (q(t) - \lambda\omega(t))y(t)$$

sur l'intervalle $[a, b]$, où $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $p(t) > 0$ dans $[a, b]$, $\omega \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\omega(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et $q \in C([a, b], \mathbb{R})$, avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} F_1[y] =& \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a), \\ F_2[y] =& \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b), \end{aligned}$$

où α_0, α_1, β_0, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, avec $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ et $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ [1]. Étant donné une fonction $f \in C([a, b])$, le problème de Sturm-Liouville (régulier) consiste à déterminer les fonctions $y = y(t)$ solution du système suivant :

$$(P) \begin{cases} (S_\lambda) \quad L_\lambda[y](t) = f(t), & \text{pour } t \in [a, b], \\ (F) \quad F_1[y] = 0, \ F_2[y] = 0. \end{cases}$$

Remarque 3.1 *Les exemples les plus courants de conditions aux limites sont :*

$$y(a) = y(b) = 0 \ \textit{et} \ y'(a) = y'(b) = 0.$$

1. de sorte que $F_{1,2}[y]$ ne se réduit pas à la condition $0 = 0$!

Remarques 3.1 *1. Si le problème de Sturm-Liouville (P) possède une solution pour chaque fonction $f \in C([a,b])$ alors le problème*

$$(P1)\begin{cases} L_\lambda[y] = f, \\ F_1[y] = c_1, \\ F_2[y] = c_2, \end{cases}$$

admet aussi une solution.

En effet, Soit $y_0 \in C^2([a,b])$ une fonction telle que $F_1[y_0] = c_1$ et $F_2[y_2] = c_2$. Alors, $y(t) = z(t) + y_0(t)$ est une solution du problème $(P1)$, où $z = z(t)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} L_\lambda[z] =& f - L_\lambda[y_0], \\ F_1[z] =& 0, \\ F_2[z] =& 0. \end{aligned}$$

2. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre deux

$$-a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + (a_0(t) - \lambda\mu(t))y(t) = g(t),$$

où $a_2 \in C([a,b],\mathbb{R})$, $a_2(t) > 0$ pour $t \in [a,b]$, $\mu \in C([a,b],\mathbb{R})$ et $\mu(t) > 0$ pour $t \in [a,b]$, a_0, $a_1 \in C([a,b],\mathbb{R})$, multiplions les deux membres de l'équation différentielle précédente par

$$\frac{1}{a_2(t)}p(t) = \frac{1}{a_2(t)} \exp\left(- \int^t \frac{a_1(s)}{a_2(s)}\, ds \right),$$

nous obtenons une équation de la forme (S_λ) :

$$-(p(t)y'(t))' + (q(t) - \lambda\omega(t))y(t) = f(t),$$

avec $q(t) = \dfrac{p(t)a_0(t)}{a_2(t)}$, $\omega(t) = \dfrac{p(t)\mu(t)}{a_2(t)}$ et $f(t) = \dfrac{p(t)g(t)}{a_2(t)}$.

Définition 3.1 • *$\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé valeur propre du problème $(S_\lambda)-(F)$ (i.e : du problème de Sturm-Liouville régulier), si l'équation homogène*

$$L_\lambda[y] = 0,$$

admet une solution $y \not\equiv 0$ (autrement dit : admet une solution non triviale qui satisfait la condition (F)).

- *La solution $y = y(t)$ est ainsi appelé fonction propre correspondante à la valeur propre λ.*

On remarque que si $L_\lambda[y] = -(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) - \lambda\omega(t)y(t) = 0$. Alors

$$L_0[y] = -(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) = \lambda\omega(t)y(t).$$

Exemple 3.1 *Soit le problème de Sturm-Liouville*

$$\begin{aligned} &y''(t) + \lambda y(t) = 0,\\ &y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

pour $\lambda > 0$ le problème admet seulement la solution trivial ($y(t) \equiv 0$). Pour $\lambda < 0$ la solution générale de l'équation $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ est de la forme

$$y(t) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}t).$$

Tenu compte les conditions aux limites $y'(0) = 0$ et $y'(\pi) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &C_1\sqrt{\lambda} = 0,\\ &C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi) - C_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquant $C_1 = 0$ et $C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Si $C_2 = 0$ alors $y(t) = 0$. Pour $C_2 \neq 0$ donc $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Il vient $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, $k = 1, 2, \cdots$ D'où, $\lambda_k = k^2$ sont les valeurs propres et $y_k(t) = \cos(kt)$ sont les fonctions propres.
On munit l'espace $C([0,\pi])$ par le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)\overline{g(t)}\,dt$, les fonctions propres forment un sous espace orthogonal

$$\langle y_k, y_k\rangle = \int_0^\pi \cos^2(kt)\,dt = \frac{\pi}{2},$$

et pour $k \neq m$, on a :

$$\begin{aligned} \langle y_k, y_m\rangle &= \int_0^\pi \cos(kt)\cos(mt)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(k+m)t \;+\; \cos(k-m)t]\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+m)t}{k+m} + \frac{\sin(k-m)t}{k-m}\bigg|_0^\pi\right] = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $\varphi_k(t) = \dfrac{y_k(t)}{\|y_k(t)\|} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(kt)\,(k = 1, 2, \cdots)$ *forment un espace orthonormal dans* $C([0, \pi])$.

Exemple 3.2 *Soit le problème de Sturm-Liouville suivant :*

$$\begin{aligned} &y''(t) + \lambda y(t) = 0, \ \text{pour } t \in [0, \pi], \\ &y(0) = 0, \\ &y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Exemple 3.3 *On considère l'équation d'Euler* $t^2y''(t) + ty'(t) + \lambda^2 y(t) = 0$ *sur l'intervalle* $t \in [0, e]$, *et les conditions* $y(1) = 0$ *et* $y(e) = 0$.

$$\frac{d}{dt}\big[ty'(t)\big] + \frac{\lambda^2}{t}y(t) = 0.$$

3.1 Propriétés

Théorème 3.1 *Soient* $L_0[y] = -(p(t)y'(t))' + q(t)y(t)$ *sur* $[a, b]$ *et* $u, v \in C^2([a, b])$ *alors l'identité de Lagrange*[2] *est :*

$$\int_a^b (\overline{v}L_0[u] - u\overline{L_0[v]})\,dt = M[u,\, v](b) - M[u,\, v](a),$$

où $M[u,\, v](t) = -p(t)(u'(t)\overline{v(t)} - u(t)\overline{v'(t)})$.

Démonstration: On a $q(t) = \overline{q(t)}$ (puisque $q \in C([a, b], \mathbb{R})$), donc

$$\begin{aligned} & \overline{v(t)}L_0[u] - u\overline{L_0[v]} \\ = \ & \overline{v(t)}(-(p(t)u'(t))' + q(t)u(t)) - u(t)(-(\overline{p(t)}\,\overline{v'(t)})' + \overline{q(t)}\,\overline{v(t)}) \\ = \ & -\overline{v(t)}(p(t)u'(t))' + \overline{v(t)}q(t)u(t) + u(t)(\overline{p(t)v'(t)})' - \overline{q(t)}u(t)\overline{v(t)} \\ = \ & -\overline{v(t)}(p(t)u'(t))' + u(t)(\overline{p(t)v'(t)})'. \end{aligned}$$

2. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

En utilisant une intégration par parties, nous avons :

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b (\overline{v}L_0[u] - u\overline{L_0[v]})\,dt \\
= \; & -\int_a^b (\overline{v}(pu')' - u(\overline{pv'})')\,dt \\
= \; & -(\overline{v}(pu') - u(\overline{pv'}))\Big|_a^b + \int_a^b [\overline{v'}(pu') - u'(\overline{pv'})]\,dt \\
= \; & -p(b)[u'(b)\overline{v(b)} - u(b)\overline{v'(b)}] + p(a)[u'(a)\overline{v(a)} - u(a)\overline{v'(a)}] \\
= \; & M[u,\, v](b) - M[u,\, v](a).
\end{aligned}
$$

■

Théorème 3.2 *Soient $y_1, y_2 \in C^2([a,\, b])$ satisfont les conditions aux limites (F). Alors*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad M[y_1,\, y_2](a) = M[y_1,\, y_2](b) = 0, \\
&(ii) \quad \int_a^b (\overline{y_1(t)}L_0[y_2] - y_2(t)\overline{L_0[y_1]})\,dt = 0.
\end{aligned}
$$

Démonstration:

1. Comme y_1 et y_2 vérifient la condition $[F_1]$, alors le système

$$
\begin{cases}
\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) = 0 \\
\alpha_0 \overline{y_2(a)} + \alpha_1 \overline{y_2'(a)} = 0
\end{cases}
$$

possède une solution non triviale $(\alpha_0,\, \alpha_1) \neq (0,\, 0)$. Par conséquent

$$
W[y_1,\, \overline{y_2}](a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ \overline{y_2}(a) & \overline{y_2'}(a) \end{vmatrix} = 0.
$$

Il vient que $M[y_1,\, y_2](a) = -p(a)(y_1'(a)\overline{y_2(a)} - y_1(a)\overline{y_2'(a)}) = 0$. D'une manière analogue, en utilisant la condition (F_2), nous obtenons $M[y_1,\, y_2](b) = 0$.

2. D'après le Théorème 3.1 et la relation *(i)*, on trouve que :

$$
\int_a^b (\overline{y_1(t)}L_0[y_2] - y_2(t)\overline{L_0[y_1]})\,dt = M[y_1,\, y_2](b) - M[y_1,\, y_2](a) = 0.
$$

D'autre part, on remarque par *(ii)* que si y_1 et y_2 sont des fonctions propres (correspondantes à λ_1 et λ_2) alors

$$\langle L_0[y_1],\, y_2\rangle - \langle y_1,\, L_0[y_2]\rangle = \int\limits_a^b \overline{y_2(t)} L_0[y_1](t)\, dt - \int_a^b y_1(t)\overline{L_0[y_2](t)}\, dt = 0,$$

il resulte que $\langle L_0[y_1],\, y_2\rangle = \langle y_1,\, L_0[y_2]\rangle$. L'opérateur L_0 est donc symétrique sur le sous-espace $\mathcal{S}$ de fonctions dans $C^2([a,\, b])$ qui satisfait aux conditions aux limites (F).

■

Théorème 3.3 *Toutes les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont réelles.*

Démonstration: Soit λ une valeur propre, donc :

$$\begin{aligned} 0 = L_\lambda[y] &= -(p(t)y'(t))' + (q(t) - \lambda\omega(t))y(t) \\ &= -(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) - \lambda\omega(t)y(t) \\ &= L_0[y] - \lambda\omega(t)y(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $L_0[\overline{y}] = \overline{\lambda}\omega(t)\overline{y(t)}$ En vertu du Théorème 3.2 et la relation *(ii)*, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (\overline{y}L_0[y] - yL_0[\overline{y}])\, dt \\ &= \int_a^b (\overline{y(t)}\lambda\omega(t)y(t) - y(t)\overline{\lambda}\omega(t)\overline{y(t)})\, dt \\ &= \int_a^a (\lambda - \overline{\lambda})\overline{y(t)}\omega(t)y(t)\, dt \\ &= (\lambda - \overline{\lambda}) \int\limits_a^b \left|y(t)\right|^2 \omega(t)\, dt. \end{aligned}$$

Comme $y(t) \not\equiv 0$, nous avons donc $\lambda = \overline{\lambda}$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Théorème 3.4 *Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres du problème de Sturm-Liouville. Alors les fonctions propres correspondantes à λ_1 et λ_2 sont orthogonales (dans $C([a,\, b])$ pondéré par $\omega(t)$). Autrement dit, si $L_0[y_1] = \lambda_1 y_1 \omega$ et $L_0[y_2] = \lambda_2 y_2 \omega$ (avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Alors*

$$\langle y_1, y_2 \rangle_\omega = \int_a^b y_1(t)\overline{y_2(t)}\omega(t)\, dt = 0.$$

Démonstration: D'après le Théorème 3.3 nous avons que λ_1 et λ_2 sont réels. En utilisant le Théorème 3.2 relation *(ii)*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\overline{y_2} L_0[y_1] - y_1 L_0[\overline{y_2}]\right) dt \\ &= \int_a^b \left(\overline{y_2(t)}\lambda_1 y_1(t)\omega(t) - y_1(t)\lambda_2 \overline{y_2(t)}\omega(t)\right) dt \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1(t)\overline{y_2(t)}\omega(t)\, dt. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_a^b y_1(t)\overline{y_2(t)}\omega(t)\, dt = 0.$ ■

Théorème 3.5 *Toutes les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville sont des combinaisons linéaires de fonctions propres réelles.*

Démonstration: Soit $L_0[y] = \lambda\omega y$, alors $L_0[y] = \overline{\lambda}\omega\overline{y} = \lambda\omega\overline{y}$ (D'après théorème 3.2). on peut écrire

$$y(t) = \frac{1}{2}(y(t) + \overline{y(t)}) + \frac{i}{2}(i\overline{y(t)} - iy(t)) = y_1(t) + iy_2(t),$$

avec $y_1(t) = \dfrac{y(t) + \overline{y(t)}}{2} = Re(y(t))$ et $y_2(t) = \dfrac{i\overline{y(t)} - iy(t)}{2} = Im(y(t))$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} L_0[y_1] = L_0[(y + \overline{y})/2] &= \frac{1}{2}(\lambda\omega y + \lambda\omega\overline{y}) \\ &= \frac{1}{2}\lambda\omega(y + \overline{y}) \\ &= \lambda\omega y_1, \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} L_0[y_2] &= L_0[(i\overline{y} - iy)/2] \\ &= \frac{i}{2}(\lambda\omega\overline{y} - \lambda\omega y) \\ &= \lambda\omega y_2. \end{aligned}$$

Par conséquent les fonctions y_1 et y_2 sont des fonctions propres réelles. ■

En vertu du Théorème 3.5, nous considérons par la suite que les fonctions propres réelles. le résultat suivant utilise le fait que $C_{L^2(\omega)}([a,\, b])$ est séparable.

3.2 Alternative de Fredholm

Soient sur l'intervalle $[a, b]$ trois fonctions continues p, q et f. On considère le problème du second ordre non homogène suivant

$$(P)_{nh} \begin{cases} (NH) & y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t), \quad \text{pour } t \in [a, b], \\ (F)_{nh} & F_1[y] = \gamma,\ F_2[y] = \delta. \end{cases}$$

On notera par (H) l'équation homogène associée, (F) les conditions aux bords homogènes et $(P)_h$ le problème homogène associé (correspondant à $f = \gamma = \delta = 0$).

Théorème 3.6 (Alternative de Fredholm)[1, 10, 11] *Le problème $(P)_{nh}$, admet pour tout γ, δ et f une solution unique si et seulement si le problème $(P)_h$ a pour seule solution la solution triviale.*

Corollaire 3.1 (Application au problème de Sturm-Liouville)[1, 11] *Soit le problème*

Chapitre 4

La fonction de Green

La fonction de Green est un moyen de trouver la solution pour les équations différentielles non-homogènes de la forme

$$Lu = f.$$

(L étant un opérateur différentiel). La solution est formellement donnée par $u = L^{-1}(f)$ de sorte que L^{-1} est un opérateur integral (à noyau) :

$$[L^{-1}(f)](x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt.$$

La fonction G est dite "*fonction de Green*"[1] de l'opérateur L. On expose dans ce chapitre la théorie fondamentale de la fonction de Green pour pouvoir l'appliquer au problème de Sturm-Liouville.

Nous allons maintenant examiner un exemple simple[2] dont nous expliquerons l'existence et la détermination de la fonction de Green de façon intuitive.

Exemple 4.1 *Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Soit le problème à deux points suivants*

$$\begin{aligned}&y''(t) = f(t), \ \textit{pour } t \in [0,1],\\ &y(0) = y(1) = 0.\end{aligned}$$

1. George Green (1793-1841)
2. Il s'agit d'un système de Sturm-Liouville régulier.

En intégrant l'équation différentielle $y''(t) = f(t)$ deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \left[\int_0^s f(t)\,dt\right] ds + Ax + B, \\ &= \int_0^x \left[\int_t^x ds\right] f(t)\,dt + Ax + B, \\ &= \int_0^x (x-t)f(t)\,dt + Ax + B. \end{aligned}$$

Comme $y(0) = 0$, on a : $B = 0$. La condition $y(1) = 0$ donne

$$0 = y(1) = \int_0^1 (1-t)f(t)\,dt,$$

donc, $A = -\displaystyle\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt$. Par suite

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (x-t)f(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt \\ &= \int_0^x (x-t)f(t)\,dt - \int_0^x x(1-t)f(t)\,dt - \int_x^1 x(1-t)\,dt \\ &= \int_0^x t(x-1)f(t)\,dt + \int_x^1 x(t-1)f(t)\,dt. \end{aligned}$$

La solution est caractérisée par la formule

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt,$$

où

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1), & si\ 0 \le t < x, \\ x(t-1), & si\ x \le t \le 1. \end{cases}$$

4.1 Fonction de Green

Le théorème suivant est essentiel

Théorème 4.1 *Il existe une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ (dite fonction de Green) telle que, pour chaque $f \in C([a,b])$, la fonction $y \in C^2([a,b])$ est solution du problème*

$$
(P_0)\begin{cases}(S_0) \quad L_0[y] = -(py')' + qy = f(t), \qquad\qquad sur \ \ [a,b], \\ \\ (F) \qquad \begin{cases} F_1[y] = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \\ F_2[y] = \alpha_0 y(b) + \alpha_1 y'(b) = 0, \end{cases}\end{cases}
$$

si et seulement si, $y(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)f(s)ds$*. La fonction* G *est définie par :*

$$
G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{p(t)W[y_1,y_2](t)} = G_1(x,t), \quad si \ \ a \leq t < x, \\ \dfrac{y_2(t)y_1(x)}{p(t)W[y_1,y_2](t)} = G_1(x,t), \quad si \ \ x \leq t \leq b, \end{cases}
$$

où y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes du problème homogène* $L_0[y] = -(py')' + qy = 0$ *avec les conditions aux bords* $F_1[y] = 0$ *et* $F_2[y] = 0$*.*

Démonstration: La solution générale de l'équation différentielle suivante

$$
L_0[y] = -[p(t)y'(t)]' + q(t)y(t) = f(t) \tag{4.1}
$$

est de la forme $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t)$,
C_1, C_2 sont des constantes, et y_1, y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$
L_0[y] = -[p(t)y'(t)]' + q(t)y(t) = 0 \tag{4.2}
$$

y_p est la solution particulière de (4.1). variation de la constante

$$
y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t), \tag{4.3}
$$

v_1 et v_2 sont fonctions qu'elles seront déterminées. Dérivons (4.3), on obtient

$$
y_p'(t) = v_1'(t)y_1(t) + v_1(t)y_1'(t) + v_2'(t) + y_2(t) + v_2(t) + y_2'(t).
$$

Il existe des paires infinies de fonctions v_1 et v_2 pour lesquelles y satisfait (4.1). on sait que

$$
v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t) + y_2(t) = 0 \tag{4.4}
$$

alors,

$$y_p'(t) = v_1(t)y_1'(t) + v_2(t) + y_2'(t),$$
$$y_p''(t) = v_1(t)y_1''(t) + v_2(t) + y_2''(t) + v_1'(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t).$$

substituant dans l'équation $-[p(t)y'(t)]' + q(t)y(t) = f(t)$, donc

$$\begin{aligned} &v_1(t)[-p(t)y_1''(t) + p'(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ &+ v_2(t)[-p(t)y_2''(t) + p'(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ &+ p(t)[v_1'(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t)] = f(t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Comme y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène (4.2), tenu compte de l'égalité précédente ($p(t)$ étant positif) on obtient

$$v_1'(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t) = \frac{f(t)}{p(t)}.$$

le système

$$\begin{cases} v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t)y_2(t) = 0, \\ v_1(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t) = \dfrac{f(t)}{p(t)}, \end{cases}$$

On a

$$v_1'(t) = -\frac{f(t)y_2(t)}{p(t)W[y_1,\, y_2](t)}, \tag{4.6}$$

$$v_2'(t) = \frac{f(t)y_1(t)}{p(t)W[y_1,\, y_2](t)}. \tag{4.7}$$

Mq : $W[y_1,\, y_2](t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Supposons que,

$$W[y_1,\, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = 0$$

pour $t_0 \in [a, b]$. Alors le système

$$a_1y_1(t_0) + a_2y_2(t_0) = 0$$
$$a_1y_1'(t_0) + a_2y_2'(t_0) = 0$$

a une solution non trivial, car $a_1, a_2 \neq 0$.
Donc la fonction $g(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ est solution de problème

$$\begin{aligned} &-[p(t)y'(t)]' + q(t)y(t) = 0, \\ &g(t_0) = g'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Mais ce problème n'a qu'une solution triviale **??** donc $g = 0$. Cela signifie que y_1 et y_2 sont linéairement dépendants, c-à-d($y_1 = \tilde{C} y_2(t)$, avec $\tilde{C}$ constante). Par conséquent, y_1 satisfait à la fois les conditions aux limites $F_1[y] = 0$, et $F_2[y] = 0$, alors $\lambda = 0$ augmentation de système de Sturm-Liouville contradiction avec l'hypothèse .Donc $W[y_1, y_2](t) \neq 0 \quad$ pour $t \in [a, b]$.

Par le lemme **??** $p(t)W[y_1, y_2](t)$ =constante.
Comme $W[y_1, y_2] \neq 0 \quad$ et $p(t) > 0$, la constante est différente a zéro.
Avec, $C = \dfrac{1}{p(t)W[y_1, y_2](t)} \neq 0$.
En intégrant (4.6) et (4.7), on obtient

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\int_b^x C y_2(t) f(t)\, dt \\ v_2(x) &= \int_a^x C y_1(t) f(t)\, dt, \end{aligned}$$

cela donne finalement

$$\begin{aligned} y_p(x) &= v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) \\ &= -y_1(x) \int_b^x C y_2(t) f(t)\, dt + y_2(x) \int_a^x C y_1(t) f(t)\, dt \\ &= \int_a^x \frac{y_2(x) y_1(t) f(t)}{p(t)W[y_1,\, y_2](t)}\, dt + \int_x^b \frac{y_1(x) y_2(t) f(t)}{p(t)W[y_1,\, y_2](t)}\, dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, si on définit la fonction de Green comme

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t) y_2(x) f(t)}{p(t)W[y_1,\, y_2](t)} = G_1(x,t), & \text{si}\, a \leq t \leq x, \\ \dfrac{y_2(t) y_1(x) f(t)}{p(t)W[y_1,\, y_2](t)} = G_2(x,t), & \text{si}\, x \leq t \leq b. \end{cases}$$

On peut écrire

$$y_p(x) = \int_a^x G_1(x,t) f(t)\, dt + \int_x^b G_2(x,t) f(t)\, dt = \int_a^b G(x,t) f(t)\, dt.$$

La fonction G est continue sur $[a,b] \times [a,b]$, $G(x,t) = G(t,x)$ et

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\partial G_2}{\partial x}(t-\epsilon,t) - \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\partial G_1}{\partial x}(t+\epsilon,t) = \frac{1}{p(t)}.$$

■

Chapitre 5

Travaux Dirigés

Exercice 5.1 *Résoudre les problèmes aux limites linéaires homogènes suivants*

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, & t \in [0,1] \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} y''(t) + \pi^2 y(t) = 0, & t \in [0,1] \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} y''(t) + \pi^2 y(t) = 0, & t \in [0,1] \\ y(0) + y(1) = 0, \\ y'(0) + y'(1) = 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, & t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

Solution 5.1 :

- L'équation associé au problème (5.1) a pour solution générale $y(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t$ puis $y \equiv 0$ par conditions aux limites et le problème (5.1) n'a pas de solution non triviale.
- L'équation associé au problème (5.2) a pour solution générale $y(t) = y(t) = k_1 \cos(\pi t) + k_2 \sin(\pi t)$ puis la solution générale $y(t) = k_2 \sin(\pi t)$, il y a donc une infinité de solutions.
- L'équation associé au problème (5.3) a pour solution $y(t) = k_1 \cos(\pi x) + k_2 \sin(\pi x)$. Par conséquant, les conditions aux limites donnent $k_1 = k_1$ et $k_2 = k_2$.
  La solution générale est $y(t) = k_1 \cos(\pi x) + k_2 \sin(\pi x)$ (il y a donc une double infinité de solutions).

- On rappelle qu'une valeur propre du problème (5.4) est toute valeur du paramètre réel λ pour laquelle ce problème admet une solution non triviale appelée fonction propre. L'équation caractéristique de problème (5.4) est $r^2 + \lambda = 0$; d'où la discussion suivante :
  - ∗ Si $\lambda \leq 0$: $r = \pm\sqrt{-\lambda}$, alors $y \equiv 0$ et donc $\lambda \leq 0$ n'est pas une valeur propre.
  - ∗ Si $\lambda = 0$: n'est pas une valeur propre.
  - ∗ Si $\lambda > 0$: $r = \pm i\sqrt{\lambda}$, alors $y(t) = k_1 \cos(t\sqrt{\lambda}) + k_2 \sin(t\sqrt{\lambda})$ et la discussion porte alors sur le déterminant $d = \sin((b-a)\sqrt{\lambda})$ du système suivant :

$$\begin{cases} k_1 \cos(a\sqrt{\lambda}) + k_2 \sin(a\sqrt{\lambda}) = 0, \\ k_1 \cos(b\sqrt{\lambda}) + k_2 \sin(b\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

  — Si $d \neq 0$, ce qui est possible si $\forall k \in \mathbb{Z}$: $(b-a)\sqrt{\lambda} \neq k\pi$, alors $y \equiv 0$.

  — S'il existe $k \in \mathbb{Z}$: $(b-a)\sqrt{\lambda} = k\pi$ alors, $d = 0$ et $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
  Dans ce cas, le problème (5.4) admet un infinité de solutions et l'on a les fonctions propres.

  — Si $\sin(a\sqrt{\lambda}) = 0$ alors, $k_1 = 0$ et $\sin(b\sqrt{\lambda}) = 0$; donc $y(t) = k \sin(t\frac{n\pi}{(b-a)})$.

  — Si $\cos(a\sqrt{\lambda}) = 0$ alors, $k_2 = 0$ et $\cos(b\sqrt{\lambda}) = 0$; donc $y(t) = k \cos(t\frac{n\pi}{(b-a)})$.

  — Si $\sin(a\sqrt{\lambda}) \neq 0$ et $\cos(a\sqrt{\lambda}) \neq 0$ alors $y(t) = k[\sin(t\sqrt{\lambda}) - \tan(a\sqrt{\lambda}) \cos(t\sqrt{\lambda})]$, $k \in \mathbb{R}^*$ et donc, à chaque fois, le problème (5.4) admet une infinité (et non une double infinité comme pour le problème (5.3)) de solutions.

Exercice 5.2 *Résoudre le problème linéaire homogène suivant*

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, & t \in [0, \pi], \\ y(0) = 0, \ \textit{et} \ y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. l'équation caractéristique est : $r^2 + \lambda = 0$, d'où la discussion suivante :

- Pour $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$, le problème (5.5) admet (uniquement) la solution triviale ($y \equiv 0$), donc $\lambda \leq 0$ n'est pas une valeur propre.

- Pour $\lambda > 0$, la solution générale de l'équation différentielle est donnée par
$$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} t),$$
c_1, c_2 sont des constantes arbitraires. Utilisons les conditions aux limites, on obtient
$$0 = y(0) = c_2,$$
$$0 = y(\pi) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\pi).$$
Donc, $c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Si : $c_1 = 0$ alors $y(t) = 0$ est la solution triviale de (5.5). Si : $c_1 \neq 0$, on a : $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ ce qui entraine que $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$.
Les valeurs propres sont donc $\lambda_k = k^2$ telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.
Finalement, le problème (5.5) admet une infinité de solutions et l'on a les fonctions propres correspondantes $y_k(t) = \sin(kt)$.

On note maintenant par L l'opérateur $-\dfrac{d^2}{dt^2}$, l'équation $y'' + \lambda y = 0$ s'écrit $Ly = \lambda y$. On munit l'espace $C([a,\, b], \mathbb{R})$ par le produit scalaire usuel
$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\, dt$$
et
$$\mathcal{S} = \{y \in C([a,\, b], \mathbb{R}) / y(0) = y(\pi) = 0\}.$$
Si $y_1,\, y_2 \in \mathcal{S}$, on a : $y_1(0) = y_1(\pi) = y_2(0) = y_2(\pi) = 0$, nous obtenons en intégrant par parties :
$$\begin{aligned}
\langle Ly_1,\, y_2\rangle &= \int_0^{\pi} Ly_1(t)y_2(t)\, dt = -\int_0^{\pi} y_1''(t)y_2\, dt \\
&= -y_1'(t)y_2(t)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} y_1'(t)y_2'(t)\, dt \\
&= -(y_1'(\pi)y_2(\pi) - y_1'(0)y_2(0)) + \int_0^{\pi} y_1'(t)y_2'(t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi} y_1'(t)y_2'(t)\, dt,
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\langle y_1,\, Ly_2\rangle &= \int_0^\pi y_1(t)Ly_2(t)\,dt = -\int_0^\pi y_1(t)y_2''(t)\,dt \\
&= -y_1(t)y_2'(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt \\
&= -(y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_1(0)y_2'(0)) + \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt \\
&= \int_0^\pi y_1'(t)y_2'(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\langle Ly_1,\, y_2\rangle = \langle y_1,\, Ly_2\rangle$ d'où L est symétrique dans $\mathcal{S}$.

Exercice 5.3 *Résoudre le problème de Sturm-Liouville*

$$
\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.6}
$$

- pour $\lambda \leq 0$ le problème (5.6) admet seulement la solution trivial ($y(t) \equiv 0$).
- Pour $\lambda > 0$ la solution générale de l'équation $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ est de la forme
$$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}t).$$
Tenu compte les conditions aux limites $y'(0) = 0$ et $y'(\pi) = 0$, on obtient
$$
\begin{aligned}
&c_1\sqrt{\lambda} = 0, \\
&c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.
\end{aligned}
$$
Par conséquant $c_1 = 0$ et $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Si $c_2 = 0$ alors $y(t) = 0$. Pour $c_2 \neq 0$ donc $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Il vient $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, $k = 1, 2, \cdots$ D'où, $\lambda_k = k^2$ sont les valeurs propres et $y_k(t) = \cos(kt)$ sont les fonctions propres.
On munit l'espace $C([0,\pi])$ par le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\overline{g(t)}\,dt$, les fonctions propres forment un sous espace orthogonal
$$\langle y_k, y_k\rangle = \int_0^\pi \cos^2(kt)\,dt = \frac{\pi}{2},$$

et pour $k \neq m$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle y_k, y_m \rangle &= \int_0^{\pi} \cos(kt)\cos(mt)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(k+m)t \;+\; \cos(k-m)t]\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+m)t}{k+m} + \frac{\sin(k-m)t}{k-m}\Bigg|_0^{\pi}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Les fonctions $\varphi_k(t) = \dfrac{y_k(t)}{\|y_k(t)\|} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(kt)\,(k = 1, 2, \cdots)$ forment un espace orthonormal dans $C([0,\pi])$.

Exercice 5.4 *Résoudre le problème de Sturm-Liouville suivant :*

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, \;\; \textit{pour } t \in [0,\pi], \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) + y'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Encore une fois, il n'y a pas de solution non triviale si $\lambda \leq 0$.
• pour $\lambda > 0$ la solution générale est donnée par :

$$y(t) = c_1 sin(\sqrt{\lambda}t) + c_2 cos(\sqrt{\lambda}t).$$

on a $y(0) = 0$ on obtient $c_2 = 0$ En utilisant la deuxième condition $y(\pi) + y'(\pi) = 0$ pour obtenir

$$c_1 sin(\sqrt{\lambda}\pi) + c_1\sqrt{\lambda}cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

pour $c_1 \neq 0$ on a

$$tg(\sqrt{\lambda}\pi) = -\sqrt{\lambda}.$$

On pose $\mu = \sqrt{\lambda}\pi$, alors

$$tg(\mu) = -\frac{\mu}{\pi}.$$

Les valeurs propres λ_n ne peuvent pas être données analytiquement,mais à travers les racines d'une équation transcendantale,qui peut être résolue numériquement.Les valeurs propres λ_n satisfont :

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{\pi^2} \quad \text{et} \quad tg(\mu_n) = -\frac{\mu_n}{\pi}.$$

Les solutions de $tg(\mu) = -\frac{\mu}{\pi}$ peuvent être considérées comme les points d'intersection graphes des fonctions $y = tg(t)$ et $y = \frac{t}{\pi}$. Cette équation a une infinité solutions. Les fonctions autonomes respectives sont :

$$y_n(t) = sin(\frac{\mu_n}{\pi})t = sin(\sqrt{\lambda}_n t).$$

Exercice 5.5 *Résoudre l'équation d'Euler*

$$t^2 y''(t) + ty'(t) + \lambda^2 y(t) = 0$$

sur l'intervalle $t \in [0, e]$, *et les conditions* $y(1) = 0$ *et* $y(e) = 0$.

$$\frac{d}{dt}\big[ty'(t)\big] + \frac{\lambda^2}{t} y(t) = 0.$$

• Pour $\lambda = 0$ le problème admet seulement la solution trivial.
• Pour $\lambda \neq 0$ la solution générale est donnée par :

$$y(t) = c_1 cos(\lambda ln(t)) + c_2 sin(\lambda ln(t))$$

En utilisant la condition $y(1) = 0$ on trouve $c_1 = 0$ et la condition $y(e) = 0$ imlique que $c_2 sin(\lambda) = 0$.

Si $c_2 = 0$, nous avons la solution triviale.

Pour obtenir des solutions non triviales, il faut considérer $c_2 \neq 0$ et $\sin(\lambda) = 0$, autrement dit,les valeurs propres sont $\lambda_n = n\pi$, $(n = 1, 2, 3, ...)$. Ainsi, les fonctions propres sont $y_n(t) = sin(n\pi \ln(t))$.

Exercice 5.6 *(Exercice supplémentaire) Déterminer les valeurs propres et les fonctions propres des problèmes aux limites linéaires*

$$[1]\left\{\begin{array}{l} y''(x)+y'(x)+\lambda y(x)=0, \quad sur\ [0,1], \\ y(0)=y(1)=0. \end{array}\right.$$

$$[2]\left\{\begin{array}{ll} y''(x)+\lambda y(x)=0, & sur\ [0,1], \\ y(0)=0\ \ et\ 3y(1)+y'(1)=0. & \end{array}\right.$$

$$[3]\left\{\begin{array}{l} y''(x)+\lambda y(x)=0, \quad sur\ [0,1], \\ y'(0)=y(1)=0. \end{array}\right.$$

$$[4]\left\{\begin{array}{l} x^2y''(x)+3xy'(x)+\lambda y(x)=0, \quad sur\ [1,e], \\ y(1)=y(e)=0. \end{array}\right.$$

$$[5]\left\{\begin{array}{l} y''(x)+2y'(x)+(\lambda+1)y(x)=0, \quad sur\ [0,5], \\ y(0)=y(5)=0. \end{array}\right.$$

$$[6]\left\{\begin{array}{l} x^2y''(x)+xy'(x)+9\lambda y(x)=0, \quad sur\ [1,e], \\ y'(1)=0\ \ et\ y(e)=0. \end{array}\right.$$

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* (Universitext), Springer. 2008.

[2] M.A. Al-Gwaiz. *Sturm-Liouville Theory and its Applications.* Springer, 2008.

[3] G. Birkhoff, G-C. Rota, *Ordinary differential equations.* John Wiley & Sons (1989).

[4] W.E. Boyce and R.C. Diprima, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons (1986).

[5] N. El Hage Hassan, *Topologie et espaces normés*, Dunod. 2011.

[6] P. Grisvard, *Calcul différentiel et équations différentielles*, O.P.U. 1980.

[7] R. B. Guenther and J. W Lee, *Sturm-Liouville Problems : Theory and Numerical Implementation.* CRC Press. 2018.

[8] S. Kallel Jallouli, *Analyse hilbertienne - Exercices corrigés.* CPU-Tunis. 2001.

[9] L.C. Piccinini, G Stampacchia, G Vidossich, *Ordinary Differential Equations in* $\mathbb{R}^n$ *: Problems and Methods.* Springer-Verlag 1984.

[10] H. Reinhard, *Equations différentielles : fondements et applications.* Gauthier-Villars, 1982.

[11] S. Djebali, Problème aux limites associés aux EDO du second ordre, cours polycopié. E.N.S.-Kouba, 2006.

[12] C Wagschal, *Fonctions holomorphes. Équations différentielles : Exercices corrigés.* Hermann. 2003.