Chapitre 2

Fonctions Multivoques ou Multi-applications

8. Définitions et Préliminaires

Introduction.

Les équations différentielles et les inclusions différentielles (ex. 1^{er} ordre $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$, $\dot{u}(t) \in F(t, u(t))$) couvrent de nombreux problèmes de mathématiques et de physique. Ceci amène à étudier le concept de fonctions multivoques et leurs propriétés (mesurabilité, continuité, etc...).

Définition 8.1. Soient T, X deux ensembles non vides.
• On appelle multi-application (fonction multivoque ou multi-fonction) définie sur T à valeurs dans X, toute application F définie sur T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X), et on note

$$F : T \to \mathcal{P}(X) \text{ ou } F : T \rightrightarrows X.$$

Donc, $\forall t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de X.

• On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, l'ensemble défini par

$$dom(F) = \{t \in T / \ F(t) \neq \emptyset\}.$$

• On appelle image de F qu'on note $Im(F)$, l'ensemble défini par

$$Im(F) = \{x \in X / \ \exists t \in T : \ x \in F(t)\}.$$

Si $A \subset I$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$, l'ensemble défini par

$$F(A) = \bigcup_{t \in A} F(t),$$

ce qui revient à écrire

$$F(A) = \{x \in X / \ \exists t \in A : \ x \in F(t)\}$$

ainsi

$$Im(F) = F(T).$$

• Très souvent nous sommes amenés à considérer la multi-application inverse $F^{-1} : X \rightrightarrows T$ définie par

$$t \in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in F(t).$$

Nous avons alors $(F^{-1})^{-1} = F$ et

$$dom(F^{-1)}) = Im(F) \text{ et } Im(F^{-1}) = dom(F).$$

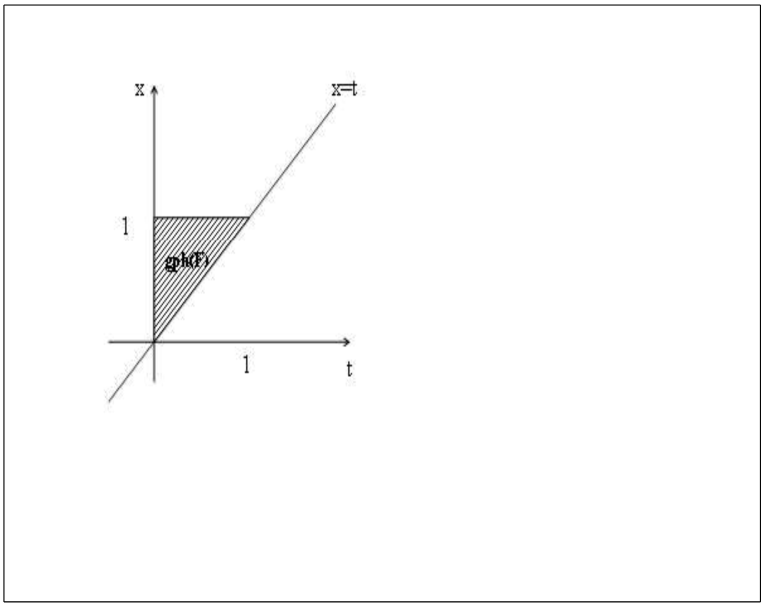
• On appelle graphe de F qu'on note $\mathtt{gph}(F)$, le sous ensemble de $T \times X$ défini par

$$\mathtt{gph}(F) = \{(t,\, x) \in T \times X /\ x \in F(t)\}.$$

Exemple 8.2. *1)*

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] & \rightrightarrows & [0,1] \\ t & \mapsto & F(t) = [t,1] \end{array}$$

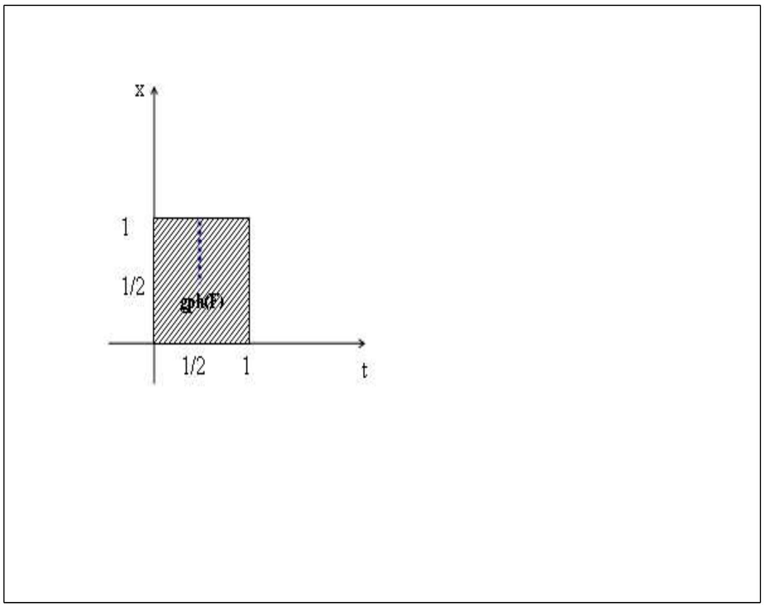
$$\mathtt{gph}(F) = \{(t,\, x) \in [0,1]^2 /\ x \in [t,1]\}.$$



2)

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] & \rightrightarrows & [0,1] \\ t & \mapsto & F(t) = \begin{cases} [0,1] & si \quad t \neq \frac{1}{2} \\ [0,1/2] & si \quad t = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{gph}(F) & = & \{(t,\, x) \in [0,1]^2 :\ x \in F(t)\} \\ & = & (([0,\dfrac{1}{2}[\cup]\dfrac{1}{2},1[) \times [0,1]) \cup (\{\dfrac{1}{2}\} \times [0,\dfrac{1}{2}]). \end{array}$$



Corollaire 8.3. *Pour tout $V \subset X$, nous avons*

$$F^{-1}(V) = \{t \in T :\ F(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Preuve.
$F : T \rightrightarrows X$.

$$\begin{aligned} t_0 \in F^{-1}(V) &\Leftrightarrow \exists x_0 \in V,\ t_0 \in F^{-1}(x_0) \\ &\Leftrightarrow \exists x_0 \in V,\ x_0 \in F(t_0) \\ &\Leftrightarrow F(t_0) \cap V \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow t_0 \in \{t \in T :\ F(t) \cap V \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

D'où $F^{-1}(V) = \{t \in T :\ F(t) \cap V \neq \emptyset\}$.
$F^{-1}(V)$ est appelé l'image réciproque large de V par la multi-application F.
On définit l'image réciproque étroite de V par la multi- application F par

$$F_+^{-1}(V) = \{t \in T :\ F(t) \subseteq V\}.$$

Nous avons

$$T \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(X \backslash V) \text{ et } T \backslash F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X \backslash V). \tag{8.1}$$

Définition 8.4. Soient $F : T \rightrightarrows X$ et $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications, alors on définit l'union:

$$\begin{array}{rcl} F \cup G : T & \rightrightarrows & X \\ t & \mapsto & (F \cup G)(t) = F(t) \cup G(t) \end{array}$$

l'intersection:

$$\begin{array}{rcl} F \cap G : T & \rightrightarrows & X \\ t & \mapsto & (F \cap G)(t) = F(t) \cap G(t) \end{array}$$

le produit cartésien:

$$\begin{array}{rcl} (F \times G) : T & \rightrightarrows & X \times X \\ t & = & (F \times G)(t) = F(t) \times G(t) \end{array}$$

Si $F : T \rightrightarrows X$ et $G : X \rightrightarrows Y$, on definit la composition:

$$\begin{array}{rcl} G \circ F : T & \rightrightarrows & Y \\ t & \mapsto & (G \circ F)(t) = G(F(t)) = \displaystyle\bigcup_{x \in F(t)} G(x). \end{array}$$

Lemme 8.5. *Soient $F : T \rightrightarrows X$, $G : T \rightrightarrows X$ et $H : T \rightrightarrows Y$ trois multi-applications et soient V, $W \subseteq X$ et $U \subseteq Y$. Alors nous avons les propriétés suivantes*

1) $(F \cup G)_+^{-1}(V) = F_+^{-1}(V) \cup G_+^{-1}(V)$.
2) $(F \cup G)^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cup G^{-1}(V)$.
3) $(F \cap G)_+^{-1}(V) \supseteq F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V)$.
4) $(F \cap G)^{-1}(V) \subseteq F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V)$.
5) $(F \times G)_+^{-1}(V \times W) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(W)$.
6) $(F \times G)^{-1}(V \times W) = F^{-1}(V) \cap G^{-1}(W)$.
7) $(H \circ G)_+^{-1}(U) = G_+^{-1}(H_+^{-1}(U))$.
8) $(H \circ G)^{-1}(U) = G^{-1}(H^{-1}(U))$.

Remarque 8.6. Dans le cas où $f : T \to X$ est une application univoque, en considérant la multi-application

$$\begin{array}{rcl} F : T & \rightrightarrows & X \\ t & \mapsto & F(t) = \{f(t)\} \end{array}$$

pour $A \subset T$ et $B \subset X$, nous avons

$$f(A) = F(A),\ F^{-1}(B) = f^{-1}(B) \ \text{ et } \ \mathtt{gph}(F) = \mathtt{gph}(f).$$

Définition 8.7. Soient $F : T \rightrightarrows X$, $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications et $\alpha : T \to \mathbb{R}$.
On définit

$$\begin{aligned} F+G : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F+G)(t) = F(t)+G(t) = \{x+y : \, x \in F(t), \, y \in G(t)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha F : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (\alpha F)(t) = \alpha(t).F(t) = \{\alpha(t).x : \, x \in F(t)\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$dom(F+G) = dom(F) \cap dom(G) \text{ et } dom(\alpha F) = dom(F).$$

8.1. **Distance de Hausdorff.** Soit $(X,\, d)$ un espace métrique, supposons dans la suite $d(x,y) < \infty$.

Définition 8.8. • Soit $A \subset X$, la distance d'un point $x \in X$ à A est donnée par

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

• Soient A, B deux sous ensembles de X. On appelle écart entre A et B et on le note $e(A,\, B)$, la quantité définie par

$$e(A,\, B) = \sup_{x \in A} d(x,\, B) = \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x,\, y))$$

avec la convension $\sup \emptyset = 0$ et $\inf \emptyset = \infty$.

• On appelle distance de Hausdorff entre A et B et on la note $h(A,\, B)$ ou $\mathcal{H}(A,\, B)$, la quantité définie par

$$h(A,\, B) = max(e(A,\, B),\ e(B,\, A)).$$

Propriétés 8.9. Soient A, B et C des sous ensembles de X alors

(1) $e(A,\, \emptyset) = \infty$ si $A \neq \emptyset$.
$e(\emptyset,\, B) = 0$.

(2) $e(A,\, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.
$h(A,\, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

(3) $e(A,\, C) \leq e(A,\, B) + e(B,\, C)$.
$h(A,\, C) \leq h(A,\, B) + h(B,\, C)$.

Preuve.

(1) Si $A \neq \emptyset$
$e(A,\, \emptyset) = \sup_{x\in A} d(x,\, \emptyset) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in\emptyset} d(x,\, y) = \infty$
$e(\emptyset,\, B) = \sup_{x\in\emptyset} d(x,\, B) = 0.$

(2) $e(A,\, B) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sup_{x\in A} d(x,\, B) = 0 \;\Leftrightarrow\; d(x,\, B) = 0, \forall\, x \in A \;\Leftrightarrow$ $x \in \overline{B},\ \forall x \in A \quad \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$

$h(A,\, B) = 0 \;\Leftrightarrow\; e(A,\, B) = 0$ et $e(B,\, A) = 0 \;\Leftrightarrow\; A \subset \overline{B}$ et $B \subset \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \overline{A} = \overline{B}.$

(3) Nous avons, $\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ \forall z \in C$

$$
\begin{aligned}
d(x,\, z) \leq d(x,\, y) + d(y, z) \quad &\Rightarrow \quad \inf_{z\in C} d(x,\, z) \leq\; d(x,\, y) + \inf_{z\in C} d(y,\, z)\\
&\Rightarrow \quad d(x,\, C) \leq d(x,\, y) + d(y,\, C)\\
&\Rightarrow \quad d(x,\, C) \leq \inf_{y\in B} d(x, y) + d(y,\, C)\\
&\Rightarrow \quad d(x,\, C) \leq d(x,\, B) + \sup_{y\in B} d(y,\, C)\\
&\Rightarrow \quad \sup_{x\in A} d(x,\, C) \leq \sup_{x\in A} d(x,\, B) + e(B,\, C)\\
&\Rightarrow \quad e(A,\, C) \leq e(A,\, B) + e(B,\, C).
\end{aligned}
$$

Comme $h(A, C) = max[e(A,\, C),\, e(C,\, A)]$, alors

$$h(A,\, C) = e(A,\, C) \leq e(A,\, B) + e(B,\, C) \leq h(A,\, B) + h(B,\, C)$$

ou bien

$$h(A,\, C) = e(C,\, A) \leq e(C,\, B)+e(B,\, A) \leq h(C,\, B)+h(B,\, A) = h(A,\, B)+h(B,\, C)$$

d'où

$$h(A,\, C) \leq h(A,\, B) + h(B,\, C).$$

■

Corollaire 8.10. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique et $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble de tous les sous ensembles fermés de X. Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), h)$ est un espace métrique.*

Preuve.
$\forall A,\, B,\, C \in \mathcal{P}_{cl}(X)$

(1) $h(A,\, B) = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{A} = \overline{B} \;\Leftrightarrow\; A = B,$

(2) $h(A,\, B) = h(B,\, A),$

(3) $h(A,\, C) \leq h(A,\, B) + h(B,\, C)$. ■

Proposition 8.11. *Soit* (X, d) *un espace métrique et soient* $A,\, B \in \mathcal{P}_{cl}(X)$. *Alors*

$$h(A,\, B) = \inf\{\varepsilon > 0 :\; A \subset V(B,\, \varepsilon) \text{ et } B \subset V(A,\, \varepsilon)\},$$

avec, $V(M,\, \varepsilon) = \{x \in X : d(x,\, M) \leq \varepsilon\}$, $\forall M \subset X$.

Preuve.
Nous avons
$A \subset V(B,\, \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A,\, x \in V(B,\, \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A,\, d(x,\, B) \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \sup\limits_{x\in A} d(x,\, B) \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; e(A,\, B) \leq \varepsilon$.
De la même manière,
$B \subset V(B,\, \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; e(B,\, A) \leq \varepsilon$.
D'où,

$$\begin{aligned} & \inf\{\varepsilon > 0 :\; A \subset V(B,\, \varepsilon) \text{ et } B \subset V(A,\, \varepsilon)\} \\ = \; & \inf\{\varepsilon > 0 :\; e(A,\, B) \leq \varepsilon \text{ et } e(B,\, A) \leq \varepsilon\} \\ = \; & \inf\{\varepsilon > 0 :\; h(A,\, B) \leq \varepsilon\} = h(A,\, B). \end{aligned}$$

■

On note par $B(A,\, r)$, la boule ouverte de rayon r autour de A,

$$B(A,\, r) = \{x \in X :\; d(x,\, A) < r\}.$$

Observons que si X est un espace de Banach alors

$$B(A,\, r) = \overline{A + rB_E}.$$

Définition 8.12. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles de (X, d). On appelle limite supérieure de la suite $(A_n)_n$, le sous ensemble de Xdéfini par

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :\; \liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0\}.$$

Et on appelle limite inférieure de la suite $(A_n)_n$, le sous ensemble de X défini par

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :\; \limsup_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0\}.$$

On dit que A est limite de la suite (A_n) si

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Proposition 8.13. *Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensembles d'un espace métrique $(X,\, d)$. Alors, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des limites des suites $(x_n)_n$ tel que $x_n \in A_n$, et $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) tel que $x_n \in A_n$, c'est à dire, l'ensemble des limites des sous suites $(x_{n'})$ tel que $x_{n'} \in A_{n'}$.*

Théorème 8.14. *Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensembles de $(X,\, d)$. Alors,*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon<0}(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{m\geq n} B(A_m,\, \varepsilon)).$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{m\geq n} A_m = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{m\geq n} B(A_m,\, \varepsilon).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} d(x, A_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{m\geq n} d(x,\, A_m)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \inf_{m\geq n} d(x,\, A_m) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \geq n/\, d(x,\, A_m) < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \geq n,\ \exists x_m \in A_m/\, d(x,\, x_m) < 2\varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad d(x,\, \bigcup_{m\geq n} A_m) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m},\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n>0}(\overline{\bigcup_{m\geq n} A_m})
\end{aligned}$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0}(\overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}).$$

■

Exemple 8.15. *Soit $(A_n)_n \subset \mathbb{R}^2$, la suite définie par*

$$A_n = \begin{cases} \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1] & \textit{si } n \textit{ est pair;} \\ \{\frac{1}{n}\} \times [-1, 0] & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Alors

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{0\} \times [-1, 1] = \{(0, x) / \ -1 \leq x \leq 1\}.$$

■

On note par $\mathcal{P}_k(X)$, la famille de tous les sous ensembles compacts de X.

Propriétés 8.16. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique complet. Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X),\, h)$ est complet et $(\mathcal{P}_k(X),\, h)$ est complet.
Si $(X,\, d)$ est un espace séparable alors $(\mathcal{P}_k(X),\, h)$ est séparable.

Définition 8.17. 1) Soit $(E,\, d)$ un espace métrique.
On appelle fonction polaire associée à la fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, qu'on note f^*, la fonction définie sur le dual de E par

$$\begin{array}{rcl} f^* : E' & \to & \mathbb{R} \\ x' & \mapsto & f^*(x') = \sup\limits_{x\in E}[\langle x',\, x\rangle - f(x)]. \end{array}$$

2) Soit $A \subset E$. On appelle fonction indicatrice de A, qu'on note $\delta(.,\, A)$, la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} \delta(.,\, A) : E & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \delta(x,\, A) = \begin{cases} 0, & x \in A; \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

3) On appelle fonction support de A, qu'on note $\delta^*(., A)$, la fonction définie sur E' par

$$\begin{array}{rcl} \delta^*(., A) : E' & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x' & \mapsto & \delta^*(x', A) = \sup\limits_{x\in A} \langle x',\, x\rangle, \end{array}$$

c'est la fonction polaire associée à $\delta(.,\, A)$.

En effet,

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x\in E}(\langle x',\, x\rangle - \delta(x,\, A)) = \sup_{x\in A}(\langle x',\, x\rangle - 0),$$

ce qui donne

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x\in A}\langle x',\, x\rangle.$$

Corollaire 8.18. *Soit E un espace vectoriel normé et soit C un sous ensemble convexe fermé de E, alors*

$$d(x,\, C) = \sup_{x'\in \overline{B}_{E'}} [\langle x',\, x\rangle - \delta^*(x', C)].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} d(x,\,C) &= \inf_{y\in C}\|x-y\| \\ &= \inf_{y\in C}\big(\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\langle x', x-y\rangle\big) \\ &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(\inf_{y\in C}\langle x', x-y\rangle\big) \\ &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\inf_{y\in C}\big(\langle x',\,x\rangle-\langle x',\,y\rangle\big) \\ &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(\langle x',\,x\rangle+\inf_{y\in C}(-\langle x',\,y\rangle)\big) \\ &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(\langle x',\,x\rangle-\sup_{y\in C}\langle x',\,y\rangle\big) \\ &= \sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(\langle x',\,x\rangle-\delta^*(x', C)\big). \end{aligned}$$

■

Dans le passage de la deuxième égalité à la troisième égalité, nous avons utilisé le théorème de l'inf-sup, applicable ici, puisque C est un convexe fermé.

Corollaire 8.19. *Soit A et B deux sous ensembles convexes fermés bornés de E, alors*

$$e(A,\,B)=\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(\delta^*(x', A)-\delta^*(x', B)\big),$$

$$h(A,\,B)=\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(|\delta^*(x', A)-\delta^*(x', B)|\big).$$

Preuve.
Nous avons

$$e(A,\,B)=\sup_{x\in A}d(x,\,B).$$

Par le corollaire 8.18

$$e(A,\,B)=\sup_{x\in A}\big[\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(\langle x',\,x\rangle-\delta^*(x', B)\big)\big]=\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big[\sup_{x\in A}\langle x',\,x\rangle-\delta^*(x', B)\big]$$

et donc

$$e(A,\,B)=\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big[\delta^*(x', A)-\delta^*(x', B)\big].$$

Par la définition de h, nous avons

$$h(A,\,B)=\sup_{x'\in\overline{B}_{E'}}\big(|\delta^*(x', A)-\delta^*(x', B)|\big).$$

■

9. Continuité des multi-applications

9.1. semicontinuité supérieure.

Définition 9.1. Soient T et X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $t_0 \in T$, si pour tout ouvert U de X contenant $F(t_0)$ ($F(t_0) \subset U$), il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, c'est à dire $F(z) \subset U$, $\forall z \in \Omega$.
On dit que F est s.c.s sur T si elle est s.c.s en tout point $t \in T$.

9.2. semicontinuité inférieure.

Définition 9.2. On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $t_0 \in T$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(z) \cap U \neq \emptyset$, $\forall z \in \Omega$ (i.e., $F^{-1}(U)$ est un voisinage de t_0).
On dit que F est s.c.i sur T si elle est s.c.i en tout point $t \in T$.

Définition 9.3. On dit que F est continue au point t_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point t_0, et F continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.

9.3. Caractérisations de la s.c.s et la s.c.i.

Corollaire 9.4. *Soit $F : T \rightrightarrows X$. La semicontinuité supérieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes*

- ***a)*** *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout ouvert V de X.*
- ***b)*** *$F^{-1}(U)$ est un fermé de T pour tout fermé U de X.*
- ***c)*** *$\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$ pour tout sous ensemble M de X.*

Corollaire 9.5. *La semicontinuité inférieure de F est équivalante à chacune des conditions suivantes*

i) *$F^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout ouvert V de X.*

ii) *$F_+^{-1}(U)$ est un fermé de T pour tout fermé U de X.*

iii) *$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$ pour tout sous ensemble M de X.*

Preuve.
• F s.c.i $\Rightarrow$ **i)**.
Soit V un ouvert de X, montrons que $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T. Pour cela, il suffit de montrer que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de tous ses points.
Soit $t \in F^{-1}(V) \Leftrightarrow F(t) \cap V \neq \emptyset$. V étant un ouvert de X et F est s.c.i au point t, alors il existe Ω un voisinage de t, tel que $\Omega \subset F^{-1}(V)$,

ceci implique que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t, donc $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T.

• **i) ⇒ ii)**.
Soit U un fermé de X. Montrons que $F_+^{-1}(U)$ est un fermé de T.
En utilisant la relation (8.1), nous avons

$$\begin{array}{rcl} U \text{ est un fermé de } X & \Leftrightarrow & X\backslash U \text{ est un ouvert de } X \\ & \Rightarrow & F^{-1}(X\backslash U) \text{ est un ouvert de } T \\ & \Rightarrow & T\backslash F_+^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } T \\ & \Leftrightarrow & F_+^{-1}(U) \text{ est un fermé de } T \end{array}$$

• **ii) ⇒ iii)**.
Soit $M \subseteq X$, nous avons $F_+^{-1}(M) \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$.
En effet, $\forall t \in F_+^{-1}(M)$

$$F(t) \subseteq M \subseteq \overline{M} \Leftrightarrow t \in F_+^{-1}(\overline{M}).$$

$\overline{M}$ est un fermé de X, alors $F_+^{-1}(\overline{M})$ est un fermé de T contenant $F_+^{-1}(M)$ d'où,

$$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M}).$$

• **iii)** ⇒ F s.c.i.
Soit $t_0 \in T$ et soit V un ouvert de X tel que $F(t_0) \cap V \neq \emptyset$.
Montrons que $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t_0.
Nous avons,

$$T\backslash F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X\backslash V) = \overline{F_+^{-1}(X\backslash V)}$$

et donc, $T\backslash F^{-1}(V)$ est un fermé de T, i.e., $F^{-1}(V)$ est un ouvert de T, c'est à dire, $F^{-1}(V)$ est un voisinage de t_0. ■

Exemple 9.6. *Soient*

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R} & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} [-1,1] & si\, t \neq 0 \\ \{0\} & si\, t = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} G:\mathbb{R} & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & G(t) = \left\{ \begin{array}{ll} [-1,1] & si\, t = 0 \\ \{0\} & si\, t \neq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que F est s.c.i sur $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas s.c.s au point 0.
Montrer que G est s.c.s sur $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas s.c.i au point 0.

Preuve.
Soit V un fermé de $\mathbb{R}$. Montrons que $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
$F_+^{-1}(V) = \{t \in \mathbb{R} : F(t) \subseteq V\}$.
• Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1,1]$ et contenant 0, alors

$$F_+^{-1}(V) = \{0\}, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

• Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant $[-1,1]$, alors

$$F_+^{-1}(V) = \mathbb{R}, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

• Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1,1]$ et 0 alors

$$F_+^{-1}(V) = \emptyset, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

D'où la semicontinuité inférieure de F.
Montrons maintenant que F n'est pas s.c.s au point 0.
En effet, $\exists U =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F(0) \subset U$, par contre $\forall \varepsilon > 0$, $F(]-\varepsilon, +\varepsilon[) = \bigcup_{x \in]-\varepsilon,+\varepsilon[} F(x) = [-1,+1] \not\subset U$. Donc F n'est pas s.c.s au point 0. ■

Théorème 9.7. *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
F est s.c.i au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de X, telle que $x_n \to x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \to y_0$.

Preuve.
$\Rightarrow /$
Soit $(x_n) \subset X$, telle que $x_n \to x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists n_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

Soit $y_0 \in F(x_0)$ et soit $U \in \mathcal{V}(y_0)$.
Nous avons $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, comme F est s.c.i,

$$\exists \Omega \in \mathcal{V}(x_0) / F(x) \cap U \neq \emptyset,\ \forall x \in \Omega.$$

$\Omega \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ x_n \in \Omega \Rightarrow F(x_n) \cap U \neq \emptyset,\ \forall n \geq n_0.$$

Soit alors $y_n \in F(x_n) \cap U$ $(n \geq n_0)$, on conclut que

$$\forall U \in \mathcal{V}(y_0),\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ y_n \in U \Rightarrow y_n \to y_0.$$

Par conséquent, $\exists (y_n) \subset Y$ tel que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \to y_0$.
$\Leftarrow /$
Supposons le contraire, c'est à dire F n'est pas s.c.i au point x_0.
F n'est pas s.c.i au point $x_0 \Leftrightarrow$
$\exists U$ ouvert de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ et $\forall \Omega \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists z \in \Omega$, $F(z) \cap U = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}),\ F(x_n) \cap U = \emptyset.$$

On obtient alors la suite (x_n) avec $x_n \to x_0$.
Par contre, il n'existe pas de suite (y_n), telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \to y_0 \in F(x_0) \cap U$, car sinon on aura

$$\forall W \in \mathcal{V}(y_0),\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in W.$$

En particulier pour $U = W$, donc $y_n \in U$. Contradiction avec $F(x_n) \cap U = \emptyset$. D'où le résultat. ■

Théorème 9.8. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs fermées . Alors le graphe de F est fermé.*

Preuve.

$$\mathtt{gph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y/y \in F(x)\}.$$

Soit (x_n, y_n) une suite de $\mathtt{gph}(F)$ qui converge vers (x, y). Montrons que $(x, y) \in \mathtt{gph}(F)$.
F s.c.s $\Rightarrow$ F s.c.s au point x $\Rightarrow$

$\forall U$ ouvert de Y tel que $F(x) \subset U$, $\exists \Omega \in \mathcal{V}(x)$ tel que $F(z) \subset U$, $\forall z \in \Omega$.

D'autre part, $\Omega \in \mathcal{V}(x)$ et $x_n \to x$ $\Rightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \Omega \ \Rightarrow\ F(x_n) \subset U,\ \forall n \geq n_0.$$

Nous avons alors pour tout voisinage ouvert U de $F(x)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow F(x_n) \subset U.$$

Or,

$$\begin{aligned}
y_n \in F(x_n) \quad &\Rightarrow \quad y_n \in U,\ \forall n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \quad \forall U \text{ voisinage de } F(x),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in U \\
&\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow d(y_n, F(x)) \leq \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow y_n \in \overline{F(x)} = F(x).
\end{aligned}$$

Comme $y_n \to y$ et $F(x)$ est fermé, alors $y \in F(x)$ et donc $(x, y) \in \mathtt{gph}F$.
Par conséquent le graphe de F est fermé. ■

Théorème 9.9. *Soient $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ deux multi-applications telles que, $\forall x \in X$, $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$.*
On suppose que

i) *F est s.c.s au point $x_0 \in X$;*

ii) *$F(x_0)$ est compact;*

iii) *le graphe de G est fermé.*

Alors, la multi-application $F \cap G$ est s.c.s au point x_0.

Preuve.
Soit N un voisinage ouvert de $F(x_0) \cap G(x_0) = (F \cap G)(x_0)$. Trouvons un voisinage V de x_0 tel que $(F \cap G)(x) \subset N$, $\forall x \in V$.

• Si $F(x_0) \subset N$, par la s.c.s de F au point x_0,
$\exists V$ voisinage de x_0 tel que $\forall x \in V$, $F(x) \subset N$ et donc
$F(x) \cap G(x) \subset N$, $\forall x \in V$, d'où le résultat.

• Si $F(x_0) \not\subset N$, considérons l'ensemble $K = F(x_0) \cap (Y \backslash N)$ qui est compact, puisque $F(x_0)$ est compact et $(Y \backslash N)$ est fermé.
Nous avons, $\forall y \in K$, $y \notin G(x_0)$ (car si $y \in G(x_0)$ alors $y \in G(x_0) \cap F(x_0) \subset N$, contradiction avec le fait que $y \in (Y \backslash N)$).
$y \notin G(x_0) \Rightarrow (x_0, y) \notin \mathtt{gph}(G)$ qui est fermé.
En posant $H = ((X \times Y) \backslash \mathtt{gph}(G))$ on aura $(x_0,\, y) \in H$ qui est ouvert, et donc il existe $V_{x_0}^y$ un voisinage ouvert de x_0 et il existe W_y un voisinage ouvert de y tels que $(V_{x_0}^y \times W_y) \subset H \Rightarrow (V_{x_0}^y \times W_y) \cap \mathtt{gph}(G) = \emptyset$, d'où

$$\forall x \in V_{x_0}^y, \quad G(x) \cap W_y = \emptyset. \tag{9.1}$$

D'une autre part,

$$K = \bigcup_{y \in K} \{y\} \subset \bigcup_{y \in K} W_y$$

$(W_y)_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert de K qui est compact, donc on peut lui extraire un sous recouvrement fini

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i} = W,$$

W est un voisinage ouvert de K et $W \cup N$ est un voisinage ouvert de $F(x_0)$. En effet,

$$F(x_0) \subset F(x_0) \cup N = (F(x_0) \cap (Y \backslash N)) \cup N = K \cup N \subset W \cup N.$$

Comme F est s.c.s au point x_0, il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que

$$F(x) \subset W \cup N, \;\; \forall x \in V_0. \tag{9.2}$$

Soit $V_{x_0} = V_0 \cap (\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_0}^{y_i})$. Par les relations (9.1) et (9.2)

$$\begin{aligned}
\forall x \in V_{x_0} &\Leftrightarrow x \in V_0 \text{ et } x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_0}^{y_i} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \cap W_{y_i} = \emptyset, \ \forall i = \overline{1,n} & \text{et} \\ F(x) \subset W \cup N \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \cap W = \emptyset, & \text{et} \\ F(x) \subset W \cup N \end{cases} \\
&\Rightarrow F(x) \cap G(x) \subset (W \cup N) \cap G(x) = N \cap G(x) \subset N.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall x \in V_{x_0}$, $F(x) \cap G(x) \subset N$, d'où le résultat. ■

Corollaire 9.10. *Soit $G : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact.*
Si le graphe de G est fermé alors G est s.c.s.

Preuve.
Appliquant le théorème précédent aux multi-applications G et

$$\begin{aligned} F : X &\rightrightarrows Y \\ x &\mapsto F(x) = Y. \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\forall x \in X, \ F(x) \cap G(x) = Y \cap G(x) = G(x) \neq \emptyset.$$

Pour tout $x_0 \in X$
1) $F(x_0) = Y$ est compact;
2) F est s.c.s au point x_0 (car F est constante);
3) $\texttt{gph}(G)$ est fermé.
Alors, $G = F \cap G$ est s.c.s au point x_0 et donc G est s.c.s sur X.

Définition 9.11. Soit (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ un multi-application.
On dit que F est H-s.c.s au point $x_0 \in X$ si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 / \ F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y : \ d(x, F(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

On dit que F est H-s.c.s sur X si et seulement si elle est H-s.c.s en tout point de X.

Corollaire 9.12. *Si F est s.c.s au point x_0 alors F est H.s.c.s au point x_0. (L'implication inverse est fausse).*

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$ et Soit $U = [V(F(x_0), \varepsilon]^\circ = \{y \in Y, \ d(y, \ F(x_0)) < \varepsilon\}$.
Nous avons, $F(x_0) \subset U$, or F est s.c.s au point $x_0 \Rightarrow \ \exists \, O_{x_0}$ voisinage

de x_0 tel que $F(x) \subset U, \ \forall\, x \in O_{x_0}$.

$$O_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0) \ \Rightarrow \ \exists\, \delta > 0, \ B(x_0, \ \delta) \subset O_{x_0}$$
$$\Rightarrow F(B(x_0, \ \delta)) \ \subset \ F(O_{x_0}) \ \subset \ U = [V(F(x_0), \ \varepsilon)]^\circ \subset V(F(x_0), \ \varepsilon).$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \ \varepsilon).$$

Par conséquent, F est H-s.c.s au point x_0. ■

Corollaire 9.13. *Si $F(x_0)$ est compact alors la H-s.c.s de F au point x_0 est équivalente à la s.c.s de F au point x_0.*

Preuve.
Nous avons, F s.c.s au point $x_0 \Rightarrow F$ H-s.c.s au point x_0 (Corollaire 10.9).
Montrons maintenant que, F H-s.c.s au point $x_0 \Rightarrow F$ s.c.s au point x_0.
Soit U un ouvert de Y tel que $F(x_0) \subset U$. Comme $F(x_0)$ est compact alors,

$$\exists\ \eta > 0 \ \text{ tel que } \ [V(F(x_0), \eta)]^\circ \subset U.$$

D'une autre part,

$$\forall \varepsilon \in]0, \eta[, \ V(F(x_0), \ \varepsilon) \subset [V(F(x_0), \ \eta)]^\circ.$$

En effet, $\forall y \in V(F(x_0), \ \varepsilon), \ d(y, \ F(x_0)) \leq \varepsilon < \eta \ \Rightarrow \ y \in [V(F(x_0)], \ \eta]^\circ$.
F étant H-s.c.s au point x_0 alors

$$\exists \delta > 0, \ \text{ tel que } \ F(B(x_0, \ \delta)) \subset V(F(x_0), \ \varepsilon) \subset U.$$

D'où, $\forall U$ voisinage ouvert de $F(x_0)$, $\exists \Omega = B(x_0, \ \delta) \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $F(x) \subset U, \forall x \in \Omega$.
Par conséquent, F est s.c.s au point x_0. ■

Corollaire 9.14. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors F est H-s.c.s au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergeant vers x_0, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_n), \ F(x_0)) = 0.$$

Preuve.
$\Rightarrow /$
F H-s.c.s au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 / \ F(B(x_0, \ \delta)) \subset V(F(x_0), \ \varepsilon)$.
Nous avons

$$\begin{aligned} x_n \to x \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \zeta > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \Rightarrow \ d(x_n, \ x_0) < \zeta \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \zeta > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq n_0 \Rightarrow \ x_n \in B(x_0, \ \zeta). \end{aligned}$$

En particulier, pour $\zeta = \delta$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \Rightarrow\; x_n \in B(x_0,\, \delta).$$

D'où

$$F(x_n) \subset F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0),\, \varepsilon)).$$

$F(x_n) \subset V(F(x_0),\, \varepsilon) \;\Leftrightarrow$

$$e(F(x_n),\, F(x_0)) \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

$\Leftarrow$ /

Supposons que F n'est pas H-s.c.s au point $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0,\, \forall \delta > 0,\, F(B(x_0,\, \delta)) \not\subset V(F(x_0),\, \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0,\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\, F(B(x_0,\, \frac{1}{n})) \not\subset V(F(x_0),\, \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0,\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\, \exists x_n \in B(x_0,\, \frac{1}{n}) \text{ et } F(x_n) \not\subset V(F(x_0),\, \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow$

$$x_n \to x_0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} e(F(x_n),\, F(x_0)) \neq 0.$$

D'où l'équivalence. ■

Définition 9.15. Soient $(X,\, d)$, (Y, d') deux espaces métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.
On dit que F est H-s.c.i au point $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0/\, F(x_0) \subset [V(F(x),\, \varepsilon)]^\circ,\; \forall x \in B(x_0,\, \delta).$$

F est H-s.c.i sur X si elle est H-s.c.i en tout point de X.

Corollaire 9.16. *Si F est H-s.c.i au point x_0 alors F est s.c.i au point x_0.*

Preuve.
Supposons que F est H-s.c.i au point x_0 et qu'elle n'est pas s.c.i en ce point. Donc nous avons l'existence d'un ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ et $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, x' \in V/\, F(x') \cap U = \emptyset \Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \exists\, x_n \in B(x_0,\, \frac{1}{n})/\, F(x_n) \cap U = \emptyset.$$

D'une autre part, par la H-s.c.i de F au point x_0 nous avons

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0, \Rightarrow F(x_0) \subset [V(F(x_n),\, \varepsilon)]^\circ$$

$\Rightarrow$

$$F(x_0) \cap U \subset [V(F(x_n),\, \varepsilon)]^\circ,\; \forall n \geq n_0.$$

Soit $y \in F(x_0) \cap U \Rightarrow y \in [V(F(x_n), \varepsilon)]^\circ \Rightarrow d'(y, F(x_n)) < \varepsilon \Rightarrow$

$\inf_{y_n \in F(x_n)} d'(y, y_n) < \varepsilon \Rightarrow \forall k > 0, \exists y_k \in F(x_{n_k})$ tel que $d'(y, y_k) < \frac{1}{k}$.

Pour k assez grand, on obtient $y_k \in U$, contradiction avec $F(x_n) \cap U = \emptyset$. Par conséquent, F H-s.c.i $\Rightarrow F$ s.c.i. ■

Corollaire 9.17. *Si $F(x_0)$ est compact alors*

$$F \text{ H-s.c.i au poin } x_0 \Leftrightarrow F \text{ s.c.i au point } x_0.$$

Preuve.

Nous avons, F H-s.c.i au point $x_0 \Rightarrow F$ s.c.i au point x_0 (Corollaire 10.13).

Supposons maintenant que F est s.c.i au point x_0. Nous avons

$$F(x_0) = \bigcup_{y \in F(x_0)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} B(y, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Comme $F(x_0)$ est compact, alors on peut extraire un sous recouvrement fini

$$F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

F est s.c.i au point $x_0 \Rightarrow$

$$\exists\, \delta_i > 0, \forall x \in B(x_0, \delta_i), F(x) \cap B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \neq \emptyset$$

pour $i = \overline{1, m}$.

Soit $\delta = \inf_{1 \le i \le m} \delta_i$, nous obtenons alors, $x \in B(x_0, \delta)$

$$\Rightarrow F(x) \cap B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \neq \emptyset, \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$\Rightarrow \exists z \in F(x) \text{ et } d(y_i, z) < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow y_i \in V(F(x), \frac{1}{2}\varepsilon), \forall i = \overline{1, m}$$

$$\Rightarrow B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset [V(F(x_0), \varepsilon)]^\circ, \ \forall i = 1, .., m.$$

En effet, $\forall z' \in B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon), d(z', y_i) < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow$

$$d(z, z') \le d(z, y_i) + d(y_i, z') < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow z' \in [V(F(x), \varepsilon)]^\circ.$$

Par conséquent,

$$F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \subset [V(F(x), \varepsilon)]^\circ \subset V(F(x), \varepsilon), \forall x \in B(x_0, \delta),$$

et donc F est H-s.c.i. au point x_0. ■

Corollaire 9.18. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors F est H-s.c.i au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergeant vers x_0, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_0),\, F(x_n)) = 0.$$

Preuve.
$\Rightarrow$ /
F H-s.c.i $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ F(x_0) \subset [V(F(x),\, \varepsilon)]^\circ,\ \forall x \in B(x_0,\, \delta).$$

Nous avons, $x_n \to x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \zeta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x_0,\, \zeta).$$

En particulier, pour $\zeta = \delta$,

$$\begin{aligned} & \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_n \in B(x_0,\, \delta) \Rightarrow F(x_0) \subset [V(F(x_n),\, \varepsilon)]^\circ \\ \Rightarrow\ & e(F(x_0),\, F(x_n)) < \varepsilon \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty} e(F(x_0),\, F(x_n)) = 0. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ /
Supposons que F n'est pas H-s.c.i

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & \exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0, \exists x \in B(x_0,\, \delta)/\ F(x_0) \not\subset [V(F(x),\, \varepsilon)]^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in B(x_0,\, \frac{1}{n})/F(x_0) \not\subset [V(F(x_n),\, \varepsilon)]^\circ. \end{aligned}$$

On obtient alors la suite $(x_n) \subset X$ telle que, $x_n \to x_0$ et $F(x_0) \not\subset [V(F(x_n),\, \varepsilon)]^\circ$, c'est à dire,

$$\lim_{n\to\infty} e(F(x_0),\, F(x_n)) \neq 0.$$

■

Corollaire 9.19. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes. Alors, F est H-continue (continue par rapport à la dictance de Hausdorff) si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ convergeant vers x_0 nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} h(F(x_n),\, F(x_0)) = 0.$$

Corollaire 9.20. *La composition de deux multi-applications s.c.i (resp. s.c.s) est s.c.i (resp. s.c.s).*

Proposition 9.21. *Soient T, X deux espaces topologiques et F_1, $F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications. Alors,*

a) *si F_1 et F_2 sont s.c.i au point $t_0 \in T$, alors $t \mapsto F_1(t) \cup F_2(t)$ est s.c.i au point t_0 (ce résultat n'a pas lieu pour l'intersection).*

b) *Si F_1 et F_2 sont s.c.s au point t_0, alors $t \mapsto F(t) \cup F_2(t)$ est s.c.s. au point t_0.*
c) *Supposons que X est métrisable. Si F_1, F_2 sont à valeurs fermées et s.c.s au point t_0, alors $t \mapsto F_1(t) \cap F_2(t)$ est s.c.s au point t_0.*

Proposition 9.22. *Soit X un espace localement convexe et soit $\alpha : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue au point $t_0 \in T$ et F_1, $F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications.*
Soit $F(t) = \alpha(t)F_1(t) + F_2(t)$ et $G(t) = \overline{co}F_1(t)$.

a) *Si F_1 et F_2 sont s.c.i au point t_0, alors F et G sont s.c.i au point t_0.*

b) *Si $F_1(t_0)$ et $F_2(t_0)$ sont compacts et si F_1, F_2 sont s.c.s au point t_0, alors F et G sont s.c.s au point t_0.*

Corollaire 9.23. *Si $F : T \rightrightarrows X$ est s.c.s à valeurs compactes alors l'image de tout compact de T est un sous ensemble compact de X.*

Contre exemple pour la s.c.i.
Soit

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} [0,t] & \text{si } t \neq 1 \\ \{0\}, & \text{si } \ t = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{gph}(F) & = & \{(t,\, x)/\, x \in F(t)\} \\ & = & \{(t,\, x)/x \in [0,\, t]\} \\ & = & \{(t,\, x) \in [0,1[\times[0,\, 1[/\, x \in [0,\, t[\} \cup \{(1,0)\}. \end{array}$$

F est s.c.i sur $[0,1]$ qui est compact mais

$$F([0,1]) = \bigcup_{t\in[0,1]} F(t) = \bigcup_{t\in[0,1]} [0,t[= [0,1[$$

qui n'est pas compact.