

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE  
& POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET



FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES  
ET DE L'INFORMATIQUE

## Cours analyses complexes

2<sup>eme</sup> Année LMD

### Mathématiques

Réalisé par

Dr Souhila Sabit

Expertisé par :



# Table des matières

Table des matières	2
<b>1 Topologie dans le plan complexe</b>	<b>9</b>
1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes	9
1.1.1 Construction de $\mathbb{C}$	9
1.1.1.1 Définition	9
1.1.1.2 Notation :	9
1.1.1.3 Propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$	10
1.1.2 Conjugés	10
1.1.2.1 Définition	10
1.1.2.2 Proposition	10
1.1.2.3 Proposition : propriétés de la conjugués	10
1.1.3 Module d'un nombre complexe , inégalités triangulaire :	11
1.1.3.1 Définition :	11
1.1.3.2 Proposition	11
1.1.3.3 Proposition : le module	12
1.1.3.4 Proposition : inégalités triangulaires	12
1.1.3.5 Proposition :	12
1.1.4 Argument d'un nombre complexe	13
1.1.4.1 Proposition : (écriture sous forme trigonométrique des nombre complexes)	13
1.1.4.2 Proposition :(la forme exponentielle)	13
1.1.4.3 Corollaire	14
1.1.5 les racines $N^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe	14
1.2 L'infini en analyse complexe.	15
<b>2 Fonction de la variable complexe</b>	<b>17</b>
2.1 Les fonctions	17
2.1.1 Définition	17
2.1.2 La continuité (1)	17
2.1.2.1 Définition	17
2.1.3 La dérivable	17

2.1.3.1	Définition . . . . .	17
2.1.4	Fonctions holomorphes . . . . .	18
2.1.4.1	Définition . . . . .	18
2.1.4.2	Proposition . . . . .	18
2.1.5	Théorème : . . . . .	19
2.1.5.1	Proposition . . . . .	19
2.1.6	Fonction analytique : . . . . .	19
2.1.6.1	Définition : . . . . .	19
2.1.7	Équivalence entre analytique et holomorphe : . . . . .	20
2.1.7.1	Définition : . . . . .	20
2.1.7.2	Théorème : . . . . .	21
2.1.7.3	Démonstration : . . . . .	21
2.2	Fonctions harmoniques . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Fonction élémentaires</b>	<b>25</b>
3.1	Fonction exponentielle . . . . .	25
3.2	Fonction logarithme . . . . .	25
3.3	Fonctions circulaires . . . . .	26
3.4	Fonctions hyperboliques . . . . .	26
3.5	Fonctions puissances . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Calcul intégral</b>	<b>29</b>
4.1	ARCS et chemins . . . . .	29
4.1.1	Définition : Chemin . . . . .	29
4.1.2	Définition : L'homotopie . . . . .	29
4.1.3	Définition . . . . .	29
4.1.4	Définition : ( $\gamma$ fermé) . . . . .	29
4.1.5	Définition : (arc simple) . . . . .	30
4.1.6	Définition : (arc opposé) . . . . .	30
4.1.7	Définition : ( $\gamma$ de classe $C^1$ par morceaux) . . . . .	30
4.1.8	Définition : (arc équivalent) . . . . .	31
4.1.9	Exemple importants des chemins : . . . . .	31
4.2	Intégrale curviligne( Intégration complexe) . . . . .	31
4.2.1	Définition . . . . .	31
4.2.2	Proposition . . . . .	31
4.2.2.1	Démonstration . . . . .	32
4.2.3	Définition . . . . .	32
4.2.4	Définition . . . . .	32
4.2.5	Proposition . . . . .	33
4.3	Formules d'intégrales de Cauchy . . . . .	33
4.3.1	Démonstration . . . . .	33

4.3.2	Théorème de Cauchy . . . . .	34
4.3.2.1	Remarque . . . . .	34
4.3.2.2	Corollaire . . . . .	34
4.4	Formule de la moyenne . . . . .	34
4.4.1	Primitive . . . . .	35
4.4.1.1	Une autre conséquence du théorème de Cauchy . . . . .	35
4.5	Inégalité de Cauchy . . . . .	35
4.6	Théorème de Liouville . . . . .	35
4.7	Théorème de Morera . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Développement en Série Taylor et en Série de Laurent</b>	<b>37</b>
5.1	Développement en séries de Taylor . . . . .	37
5.2	Séries de Laurent et Résidus . . . . .	38
5.3	Les couronnes . . . . .	38
5.3.1	Définition . . . . .	38
5.4	Série de Laurent . . . . .	38
5.4.0.1	Proposition . . . . .	38
5.4.1	Les points singuliers . . . . .	40
5.4.1.1	Définition . . . . .	40
5.4.1.2	Définition . . . . .	40
5.4.1.3	Définition . . . . .	41
5.4.1.4	Définition . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Théorème des résidus et ses applications</b>	<b>43</b>
6.1	Théorèmes des Résidus . . . . .	43
6.1.0.1	Démonstration . . . . .	43
6.2	Résidu en un point singulier isolé . . . . .	44
6.2.1	Définition . . . . .	44
6.2.1.1	Remarque . . . . .	44
6.2.2	Calcul pratique de résidus . . . . .	44
6.2.2.1	Proposition . . . . .	45
6.2.2.2	Proposition . . . . .	45
6.3	Les lemmes de Jordan . . . . .	46
6.3.1	Lemme 1 . . . . .	46
6.3.2	Lemme 2 . . . . .	46
6.3.3	Lemme 3 . . . . .	46
6.4	Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ : . . . . .	47
6.4.1	Définition : . . . . .	47
6.4.1.1	Exemple . . . . .	48
6.5	Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ : . . . . .	49

6.5.1	Définition : . . . . .	49
6.5.1.1	Exemple : . . . . .	50
6.6	Calcul des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x) x} dx$ : . . . . .	51
6.6.1	Définition : . . . . .	51
6.7	Calcul des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}$	
	avec $-1 < \alpha < 0$ . . . . .	53
6.7.1	Définition : . . . . .	53
6.7.1.1	Exemple : . . . . .	55
6.8	L'intégrale sous forme $\int_a^b f(x) dx$ avec $a, b$ des points singuliers de $f$	56
6.9	Principe de l'argument . . . . .	59
6.10	Théorème de Rouché . . . . .	59

**Bibliographie****63**

# Introduction

Les premiers résultats mathématiques qui a été estimées par les humains c'était les chiffres, et on a travaillé dur pour développer l'ensemble des nombres réels, ce dernier qui ne couvre pas la nécessité pour les mathématiciens au cours de son recherche de solutions aux problèmes sur les équations du second degré avec son delta négatif, tels que :  $x^2 + 2 = 0$ .

Les mathématiciens sont obligés de chercher de nouveaux moyens de couvrir l'insuffisance dans l'ensemble des nombres réels, a été le résultat de la recherche est l'accès au nouveau nombre appelé plus tard le nombre complexe, où l'idée de cette question a conduit à l'expansion de la gamme des nombres réels d'un groupe peuvent être obtenues dans laquelle les solutions aux équations mentionnées ci-dessus, Il a appelé le nombre de groupe complexe (ou composite), et ils sont généralisés l'analyse et faciliter les intégrations complexes, pour tomber tout cela dans un domaine indépendant, celle de l'analyse complexe, qui est devenu une partie essentielle de la nécessité quotidienne, des ingénieurs, des physiciens ..., Parmi les questions abordées par l'analyse complexe, l'intégrales réels qui a toujours été un obstacle dans la voie des mathématiciens et physiciens.

Mais avant d'entrer dans le cœur de la question dont il est détendu l'intégration utilisant l'intégration de notre rapport, nous devons d'abord connaître les propriétés des nombres complexes, nous allons examiner dans le premier chapitre, la construction de  $\mathbb{C}$ , la forme algébrique et la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Ensuite dans le deuxième chapitre, les Fonctions de la variable complexe qui contient une définition de la fonction de la variable complexe, les fonctions holomorphes, fonctions analytiques, les conditions de Cauchy-Riemann et les fonctions harmoniques. Troisième chapitre est les fonctions élémentaires : fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques et fonctions puissances. Le Calcul intégral est le quatrième chapitre qui contient l'intégrale curviligne, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, formule de la moyenne, formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, inégalité de Cauchy et théorème de Liouville-Théorème de Morera.

Ensuit le cinquième chapitre est développement en série Taylor et en série de Laurent :

1. Développement en séries de Taylor.
2. Développement en série de Laurent.
3. Singularité isolées d'une fonction complexe .

Enfin sixième chapitre est théorème des résidus et ses applications qui contient théorème des résidus, calcul des résidus, applications au calcul intégral et à la sommation des séries, principe de l'argument et théorème de Rouché et conclusion de ce cours.

# Chapitre 1

## Topologie dans le plan complexe

### 1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

#### 1.1.1 Construction de $\mathbb{C}$

##### 1.1.1.1 Définition

On appellerons corps des nombres complexes, et notons  $\mathbb{C}$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni des deux lois internes  $+$  et  $\otimes$  Définis ainsi :

Pour tout  $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$  on pose :

$$\begin{aligned}(a, b) \oplus (a', b') &= (a + a', b + b') \\ (a, b) \otimes (a', b') &= (aa' - bb', ab' + a'b)\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$  est corps commutative.

##### 1.1.1.2 Notation :

Pour simplifier les écritures, nous écrivons  $+$  et  $\times$  à la place des lois de composition les internes  $\oplus$  et  $\otimes$ .

Pour tout nombre réel  $a$ , nous convenons d'identifier le nombre  $(a, 0)$  avec le réel  $a$ . Nous noterons ailleurs  $i$  le nombre complexe  $(0, 1)$ .

Appliquant cette convention et utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{C}$ , on peut écrire pour tout nombre complexe  $(a, b)$  :

$$(a, b) = a + ib$$

En effet :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Par ailleurs

$$(0, b) = (b, 0) \times (0, 1) = ib$$

Donc :

$$(a, b) = a + ib.$$

### 1.1.1.3 Propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$

Avec les convention d'écritures précédentes, l'addition et la multiplication sont définies sur  $\mathbb{R}^2$  deviennent [6, 10, 9]

$\forall z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $z = a + ib$

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

**Proposition 01** Soient  $a, a', b$  et  $b'$  des réels on'a :

- $a + ib = 0 \iff a = b = 0$
- $a + ib = a' + ib' \iff a = a'$  et  $b = b'$

**Proposition 02**

- $z$  réel si est seulement si  $Im(z) = 0$
- $z$  imaginaire pur si est seulement si  $Re(z) = 0$

## 1.1.2 Conjugués

### 1.1.2.1 Définition

Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , un nombre complexe, on appelle le conjugué de  $z$  complexe [6, 10, 9]  $\bar{z}$  défini par  $\bar{z} = a - ib$

### 1.1.2.2 Proposition

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on'a :

- $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\overline{\bar{z}} = z$

- un nombre complexe  $z$  est réel si est seulement si  $\bar{z} = z$  et imaginaire pur si est seulement si  $\bar{z} = -z$

### 1.1.2.3 Proposition : propriétés de la conjugués

Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- si  $z' \neq 0$   $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

### 1.1.3 Module d'un nombre complexe , inégalités triangulaire :

#### 1.1.3.1 Définition :

Module d'un nombre complexe soit  $z = a + ib$  un nombre complexe et  $M$  son image dans  $P$ .

Le module d'un nombre complexe  $z = a + ib$  est un nombre positive [7, 11, 2] et c'est la distance  $OM$  avec  $M(a, b)$

alors :  $z = a + ib$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$$

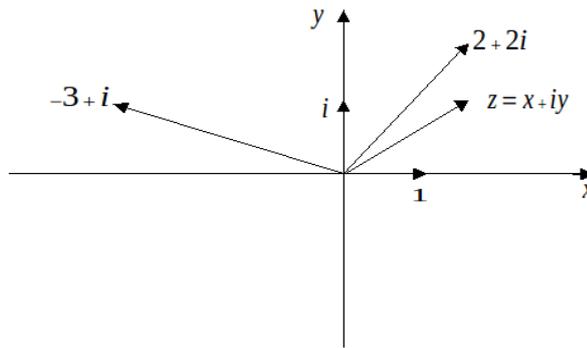


FIGURE 1.1 – Le plan complexe

#### 1.1.3.2 Proposition

soit  $z = a + ib$  et  $\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$ , on'a :

$$|z|^2 = |z| \cdot |\bar{z}|$$

**preuve** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  et soit  $M$  l'image de  $M$  dans  $P$  alors on sait que :

$$|z|^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = a^2 + b^2$$

Par ailleurs

$$z\bar{z} = (+ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

### 1.1.3.3 Proposition : le module

Pour tout nombre complexe  $z$

1.  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2.  $|z| = |\bar{z}|$
3.  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
4.  $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

**Démonstration** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| = 0$  alors  $a^2 + b^2 = 0$  ce que n'est possible que si  $a = b = 0$  réciproquement si  $z = a + ib$  est tel que  $a = b = 0$  alors nécessairement  $|z| = 0$

Il est clair que si  $z = a + ib$  alors

$$\operatorname{Re}(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

### 1.1.3.4 Proposition : inégalités triangulaires

Pour tout nombre complexes  $z$  et  $z'$  on'a :

1.  $|zz'| = |z||z'|$
2.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
3.  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$  si  $z' \neq 0$
4.  $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Les inégalités (2) et (4) sont appelées inégalités triangulaires

### 1.1.3.5 Proposition :

Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , soit  $A$  le point du plan d'affixe  $a$  l'ensemble des point du plan d'affixe  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant

1.  $|z - a| = r$  est le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$ .
2.  $|z - a| \leq r$  est le disque fermé de centre  $A$  et de rayon  $r$ .
3.  $|z - a| < r$  est le disque ouvert de centre  $A$  et de rayon  $r$ .

**Preuve :** Ces trois résultats proviennent de l'équivalence suivante :

$$|z - a| = r \Leftrightarrow AM = r$$

### 1.1.4 Argument d'un nombre complexe

#### 1.1.4.1 Proposition : (écriture sous forme trigonométrique des nombre complexes)

Si  $z$  un nombre complexe non nul alors, il existe un  $\rho$  tel que  $\rho = |z|$  et au moins un nombre réel  $\theta$  noté l'argument tel que

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\rho}$$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\rho}$$

alors

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

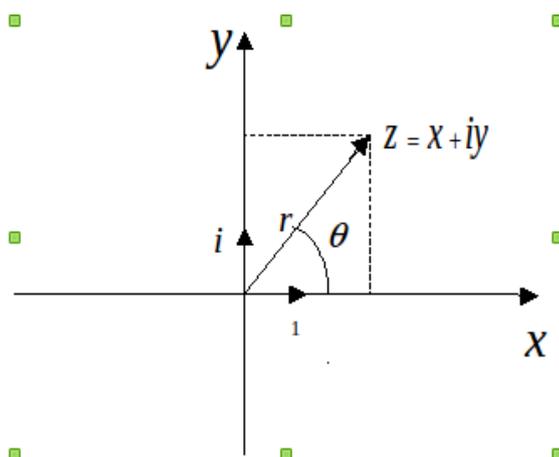


FIGURE 1.2 – Argument d'un nombre complexe

#### 1.1.4.2 Proposition :(la forme exponentielle)

Soient  $z \neq 0$  alors la forme exponentielle de  $z$  est  $z = \rho e^{i\theta}$

L'argument de  $z$ , un tel nombre n'est pas unique :

si  $\theta_0$  est un argument de  $z$ , l'ensemble de tous les arguments de  $z$  est donné par :  $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , on note  $\theta_0$  argument principal avec  $-\pi < \theta_0 \leq \pi$

Enfin, il existe un unique argument de  $z$  appartenant à l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  on l'appellera argument principale de  $z$ .

Soit deux nombres complexes  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $z' = \rho' e^{i\theta'}$

$$\begin{aligned} \text{On'a : } zz' &= \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')} \\ \frac{z}{z'} &= \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}, \text{ si } z' \neq 0, \end{aligned}$$

### 1.1.4.3 Corollaire

soient  $z$  et  $z'$  deux nombre complexes on'a :

1.  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{[2\pi]}$
2.  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{[2\pi]}$ , si  $z' \neq 0$
3.  $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{[2\pi]}$
4.  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^* \arg(z^n) = n \arg(z)$

**Preuve :** Soient  $n \in \mathbb{Z}$  et  $z \in \mathbb{C}^*$

on'a :  $z = \rho e^{i\theta}$  ou  $\theta \in \mathbb{R}$

On'a donc  $z^n = (\rho e^{i\theta})^n$

$$= \rho^n (e^{i\theta})^n$$

$$= \rho^n e^{in\theta}$$

Par concéquent  $\arg(z^n) = n\theta = n \arg(z)$

la formule de Moivre

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

### 1.1.5 les racines $N^{\text{éme}}$ d'un nombre complexe

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tq  $z = r e^{i(\theta+2k\pi)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  alors

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n e^{i(\theta+2k\pi)n}}$$

Donc il y n racine de  $z$

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

## 1.2 L'infini en analyse complexe.

Le plan achevé  $\bar{\mathbb{C}}$  s'obtient du plan complexe  $\mathbb{C}$  par adjonction d'un point  $\infty$  l'infini :

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \infty$$

Par définition,

$$\begin{array}{ll}
 z_n \rightarrow \infty & \text{si et seulement si } |z_n| \rightarrow +\infty \\
 \text{Ainsi} & \\
 z_n \rightarrow \infty & \text{si et seulement si } \frac{1}{z_n} \rightarrow 0 \\
 \text{et} & \\
 z_n \rightarrow \infty \text{ et } w_n \rightarrow a & \Rightarrow z_n + w_n \rightarrow \infty \\
 \text{et} & \\
 z_n \rightarrow \infty \text{ et } w_n \rightarrow a \neq 0 & \Rightarrow z_n w_n \rightarrow \infty
 \end{array}$$



# Chapitre 2

## Fonction de la variable complexe

### 2.1 Les fonctions

#### 2.1.1 Définition

$f$  est une fonction complexe d'un variable complexe

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longmapsto \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

#### 2.1.2 La continuité (1)

##### 2.1.2.1 Définition

On dit que une fonction  $f$  est continue en  $z_0$  si  $f(z_0)$  existe et  $f(z) \rightarrow f(z_0)$  lorsque  $z \rightarrow z_0$

(i.e)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

#### 2.1.3 La dérivable

##### 2.1.3.1 Définition

On dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $z_0$ .

Si  $f$  est continue et la limite de  $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$  existe lorsque  $h$  tend vers 0. On notera la limite par  $f'(z_0)$ .

**Corollaire 2.1.**  $f$  est dérivable au point  $z_0$  alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

## 2.1.4 Fonctions holomorphes

Dans tout ce qui suit  $D$  désigne un ouvert de  $\mathbb{C}$

### 2.1.4.1 Définition

$f$  est une fonction holomorphe[6, 1, 8] dans  $D \Leftrightarrow f$  dérivable en tout point de  $D$ .

### 2.1.4.2 Proposition

Soit  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , avec  $z = x + iy$   $f$  est une fonction holomorphe si et seulement si  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  ont leurs premières dérivées partielles continues satisfaisant les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.1)$$

**Démonstration** Par hypothèse  $f$  est dérivable en  $z_0$ , donc  $f'(z_0)$  existe pour démontrer Cauchy-Riemann

On va considérer deux directions différentes pour vers  $z_0$  et on va utiliser le fait que la limite de  $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$  en  $z_0$  est la même suivant toutes[6, 10, 3] les directions.

L'approche suivant l'axe réel ( $\Delta y = 0$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} &= \\ = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

L'approche suivant l'axe imaginaire donne :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

puis que notre fonction est dérivable alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

### 2.1.5 Théorème :

$$f = u + iv \text{ holomorphe dans } D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ dans } D \\ \text{et} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

Cette condition est appelée les conditions de Cauchy- Riemann .

**Exemple**  $z \mapsto z$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  mais  $z \mapsto \bar{z}$  n'est pas holomorphe dans aucun ouvert de  $\mathbb{C}$ .

#### 2.1.5.1 Proposition

1. Si  $f$  et  $g$  sont holomorphe[4, 9, 8] dans l'ouvert  $D$ , alors :
  - a  $f + g, (f + g)' = f' + g'$  et  $fg$  sont holomorphe dans  $D$ .
  - b  $\frac{f}{g}$  est holomorphe dans  $D - \{z \in \mathbb{C} \setminus g(z) = 0\}$
  - c les règles classiques de calcul des dérivées sont équivalentes :

$$(f + g)' = f' + g', (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

2. Si  $f$  est holomorphe dans un voisinage de  $z_0$  et si  $g$  est holomorphe dans un voisinage de  $f(z_0)$  alors :
  - $g \circ f : z \mapsto g[f(z)]$  est holomorphe dans un voisinage de  $z_0$ .

### 2.1.6 Fonction analytique :

#### 2.1.6.1 Définition :

Soit  $f$  une fonction définie dans un voisinage de  $z_0 \in \mathbb{C}$   
 On dit que  $f$  est développable en série entière au point  $z_0$ , s'il existe une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence non nul et un voisinage  $U$  de  $z_0$  dans  $\mathbb{C}$  tels que pour tout  $z \in U$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit que la fonction  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  est analytique dans  $U$  si elle est développable en série entière en tout point de  $U$ .

**Exemple** La fonction  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  est analytique dans le disque  $D(0, 1)$

$\forall z \in D(0, 1)$  la fonction  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Alors  $\forall z_0 \in D(0, 1)$  et  $z \in D(z_0, 1 - |z_0|) \subset D(0, 1)$

Donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

**Théorème 1.** *La somme et le produit de deux fonction analytiques sur  $G$*

*est analytiques sur  $G$*

**Preuve 2.1.** *Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  et  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ ,  $\forall z \in D(z_0, r) \subset G$*

Alors

$$\begin{aligned} f(z) + g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

et

$$f(z) \times g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

## 2.1.7 Équivalence entre analytique et holomorphe :

### 2.1.7.1 Définition :

Nous avons vu qu'une fonction de la variable réelle développable[10, 7, 8] en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable, maintenant que nous avons donné au sens à la notion de dérivation complexe nous allons montrer que ce résultat est encore valable pour les fonctions d'une variable complexe.

**2.1.7.2 Théorème :**

Une fonction analytique sur un ouvert  $U$  tel que  $U \neq \emptyset$  de  $\mathbb{C}$  est holomorphe sur  $U$ .

Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ , pour  $z \in D(z_0, r) \subset U$ , on a alors :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \text{ pour tout } z \in D(z_0, r).$$

**2.1.7.3 Démonstration :**

Pour  $z_0 \in U$ , il existe  $r > 0$ , tel que  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Pour  $z \in D(z_0, r) \subset U$ , et pour  $z \neq z_0$  dans  $D(z_0, r)$ , on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n = g(z)$$

Avec :  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = a_1$ , puisque la fonction  $g$  est continue en  $z_0$ , la série entière  $\sum a_{n+1} t^n$  qui à même rayon de convergence que  $\sum a_n t^n$  est continue sur  $D(0, r)$ , donc en 0.

La fonction  $f$  est donc dérivable en  $z_0$  de dérivée d'une fonction analytique sur  $U$  est elle même analytique sur  $U$ .

Donc :  $f$  est holomorphe.

On a :

$$(z + h - z_0) \leq |z - z_0| + \rho - |z - z_0| < \rho$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z_0)}{h} - g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(z, h) \end{aligned}$$

Ou on a posé pour  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} P(z, h) &= \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} - n(z-z_0)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (z+h-z_0)^{n-1-k} (z-z_0)^k - n(z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

On a, alors :

$$\begin{aligned} |P(z, h)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |z + h - z_0|^{n-1-k} |z - z_0|^k + n |z - z_0|^{n-1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-1-k} \rho^k + n \rho^{n-1} = 2n \rho^{n-1} \end{aligned}$$

La série  $\sum n a_{n-1} \rho^{n-1}$  étant convergente.

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on peut donc trouver un entier naturel  $n_\varepsilon \geq 1$  tel que :  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_{k-1} \rho^{k-1} < \varepsilon$$

Et un réel  $\rho_1 \in ]0, \rho - |z - z_0|[$  tel que pour :  $|h| < \rho_1$  on ait :

$$\left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k P_k(z, h) \right| < \varepsilon$$

On a  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k P_k(z, h) = 0$ , ce qui donne pour  $|h| < \rho_1$

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| < 3\varepsilon$$

On a donc ainsi montré que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z)$$

Ce qui signifie que  $f$  est C-dérivable en  $z$  de dérivée  $g(z)$ .

Alors :  $f$  est donc holomorphe sur  $U$  de dérivée  $f$  est analytique sur  $U$

Donc :  $f$  est holomorphe.

## 2.2 Fonctions harmoniques

### Définition 2.1.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et soit  $f$  une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est harmonique sur  $\Omega$  si  $f$  est [5, 11, 3] de classe  $C^2$  sur  $\Omega$  et si  $\Delta f = 0$  sur  $\Omega$ , ou  $\Delta f$  est le Laplacien de  $f$  défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

**Remarque 1.**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est harmonique si et seulement si  $Re(f)$  et  $Im(f)$  sont harmoniques sur  $\Omega$ .

Car  $Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$  et  $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$

**Proposition 2.1.**

Toute fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$  est harmonique sur  $\Omega$

**Preuve 2.2.**

Soit  $f$  une fonction holomorphe alors  $Re(f) = u$  et  $Im(f) = v$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ dans } \Omega \\ \text{et} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{Alors } \Delta u = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \text{Alors } \Delta v = 0 \end{array} \right.$$



# Chapitre 3

## Fonction élémentaires

### 3.1 Fonction exponentielle

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

formule dans laquelle  $e$  est la base des logarithmes népériens[6]. Si  $a$  est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelle.

### 3.2 Fonction logarithme

La fonction  $f(z) = \operatorname{Log} z$ ;  $z \neq 0$  est définie comme l'invers[6]e de la fonction exponentielle  $z$ .

$$w = \operatorname{Log}(z) \Leftrightarrow z = e^w$$

**Proposition 3.1.** *La fonction  $\operatorname{Log} z$ ,  $z \neq 0$  est une fonction multiforme définie par*

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{arg}(z) = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi); k \in \mathbb{Z} \text{ ou } -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$$

**Exemple 3.1.**

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i(\operatorname{Arg}(1+i) + 2k\pi) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + i2k\pi$$

### 3.3 Fonctions circulaires

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou circulaires[6],  $\sin z$ ,  $\cos z$ , etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \csc z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} & \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} & \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{aligned}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe.

### 3.4 Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{sh} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= i \operatorname{sh} z & \cos(iz) &= \operatorname{ch} z & \operatorname{tg}(iz) &= i \operatorname{th} z \\ \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z & \operatorname{th}(iz) &= i \operatorname{tg} z \end{aligned}$$

### 3.5 Fonctions puissances

La fonction  $z^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$$

De même si  $f(z)$  et  $g(z)$  sont deux fonctions donnée[6]s, de  $z$ , on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log}(f(z))}$$

---

**Exemple 3.2.**

$$(1+i)^{(1+i)} = e^{(1+i)\log(1+i)} = e^{(1+i)(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + i2k\pi)}$$

**Remarque 2.** On a

$$(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}; \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$$

mais

$$(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$$

dans le cas général si  $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$

**Exemple 3.3.** On a

$$((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(i(\pi+2k\pi))} = e^{-\pi-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

et

$$(-i)^{2i} = e^{2i\log(-i)} = e^{2i(i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{\pi-4k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$((-i)^2)^i \neq (-i)^{2i}$$

---

# Chapitre 4

## Calcul intégral

### 4.1 ARCS et chemins

#### 4.1.1 Définition : Chemin

On appelle chemin sur  $\mathbb{C}$  toute application continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Le point initial du chemin est  $\gamma(a)$  et le point final est  $\gamma(b)$ . Ces deux points constituent les extrémités du chemin.

#### 4.1.2 Définition : L'homotopie

Soient  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins[6, 8, 9] définis sur le même intervalle  $[a, b]$ , on dit que  $\gamma_2$  est homotope à  $\gamma_1$  s'il existe un intervalle  $[\alpha, \beta]$  et une application continue  $h : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  qui à  $(t, s) \in [a, b] \times [\alpha, \beta]$  associe  $h(t, s) \in \Omega$  tel que :

$$h(t, \alpha) = \gamma_1(t)$$

Et

$$h(t, \beta) = \gamma_2(t)$$

#### 4.1.3 Définition

On appelle un arc toute application continue[3, 4, 9]  $\gamma$  d'un intervalle compact  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , s'il en est ainsi on le notera souvent  $([a, b], \gamma)$  on dit que  $\gamma(a)$  est l'origine et que  $\gamma(b)$  est l'extrémité.

#### 4.1.4 Définition : ( $\gamma$ fermé)

On dit que  $\gamma$  est fermé si  $\gamma(a) = \gamma(b)$

---

#### 4.1.5 Définition : (arc simple)

On dit que  $\gamma$  est un arc simple si l'application est injective.  
Il est dit réduit à un point : si l'application  $\gamma$  est constante.  
Si  $([a, b], \gamma)$  est un arc, on note  $Im(\gamma)$  pour  $\gamma([a, b])$  et si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , on dit que  $\gamma$  est un arc dans  $U$  si  $Im\gamma \subset U$

#### 4.1.6 Définition : (arc opposé)

Arc opposé de  $([a, b], \gamma)$  est l'arc  $([a, b], \delta)$  défini pour  $t \in [a, b]$  par

$$\delta(t) = \gamma(a + b - t)$$

Intuitivement c'est l'arc  $\gamma$  (parcouru dans l'autre sens)

#### 4.1.7 Définition : ( $\gamma$ de classe $C^1$ par morceaux)

Soit  $[a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et  $\gamma$  un application de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ , rappelons que  $\gamma$  est dite de classe  $C^1$  par morceaux si elle est continue et s'il existe une subdivision :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

de  $[a, b]$  telle que  $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ , soit continûment dérivable pour chaque  $i = 0 \dots n - 1$ ,  $\gamma_i$  est la restriction de  $\gamma$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$  avec :

$$\gamma_i(a_{i+1}) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$$

On appelle chemin dans un ouvert  $U$  tout arc  $([a, b], \gamma)$  dans  $U$  tel que  $\gamma$  soit de classe  $C^1$  par morceaux.

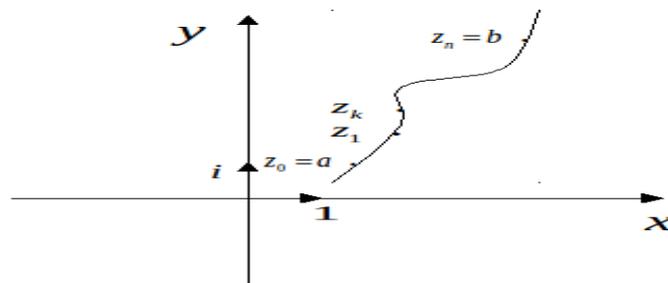


FIGURE 4.1 – chemin par morceaux

---

### 4.1.8 Définition : (arc équivalent)

On dit que deux chemins  $([a, b], \gamma)$  et  $([c, d], \delta)$  sont dits équivalent s'il existe une application

$\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  vérifiant [9, 4, 3] les conditions suivantes :

- i)  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  est bijective croissante et de classe  $C^1$  par morceaux
- ii) on'a  $\gamma = \delta \circ \varphi$

Si  $\gamma$  et  $\delta$  sont équivalente on'a :

$$Im\gamma = Im\delta$$

### 4.1.9 Exemple importants des chemins :

1. Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , le chemin fermé  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \rightarrow z_0 + re^{it}$$

est appelé le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ , parcouru dans le sens direct

2. Soit  $u, v \in \mathbb{C}$  le chemin  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \rightarrow (1 - t)u + tv$$

est le segment orienté d'origine  $u$  et d'extrémité  $v$  : on le note  $[u, v]$  le chemin opposé a ce chemin est le segment orienté  $[v, u]$

## 4.2 Intégrale curviligne( Intégration complexe)

### 4.2.1 Définition

Soit  $([a, b], \gamma)$  un chemin de classe  $C^1$  et  $f$  une fonction continue sur  $Im(\gamma)$ .

l'intégrale de  $f$  sur  $\gamma$  noté par  $\int_{\gamma} f(z) dz$  est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

### 4.2.2 Proposition

Si  $([a, b], \gamma_1)$  et  $([c, d], \gamma_2)$  sont deux chemins équivalentes et si  $f$  est un fonction holomorphe sur  $Im\gamma$ , on'a

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

---

#### 4.2.2.1 Démonstration

On'a  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , il existe une bijective  $\varphi$  croissant avec :  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$   
 $\gamma_2' = \varphi' \cdot \gamma_1'(\varphi)$

La formule de changement de variable dans les intégrales fournit

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_c^d f[\gamma_2(t)] \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_c^d f \circ (\gamma_1 \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \gamma_1'(\varphi(t)) dt \\ &= \int_c^d f[\gamma_1(\varphi(t))] \gamma_1'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt\end{aligned}$$

On fait un changement de variable  $z = \varphi(t)$  alors  $dz = \varphi'(t) dt$  et puisque  $\varphi$  est une bijective croissante donc  $a = \varphi(c)$  et  $b = \varphi(d)$ , alors :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_a^b f[\gamma_1(z)] \gamma_1'(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz\end{aligned}$$

Donc  $\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$

#### 4.2.3 Définition

Soit  $([a, b], \gamma)$  et  $([c, d], \gamma^\circ)$  des chemin  $f$  une fonction continue sur  $Im\gamma \cup Im\gamma^\circ$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^\circ} f(z) dz &= \int_a^b (f \circ \gamma^\circ)(t) \gamma^{\circ\prime}(t) dt \\ &= - \int_a^b f \circ \gamma(a+b-t) \gamma'(a+b-t) dt \\ &= \int_b^a (f \circ \gamma)(t') \gamma'(t') dt' \\ &= - \int_{\gamma} f(z) dz\end{aligned}$$

#### 4.2.4 Définition

La longueur d'un chemin  $\gamma$  de classe  $C^1$  est la valeur positive suivante :

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

---

### 4.2.5 Proposition

Si  $f$  est continue alors :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{Sup}(|f|) \text{long}(\gamma)$$

## 4.3 Formules d'intégrales de Cauchy

Si  $f$  est une fonction holomorphe dans un ouvert  $U$  simplement connexe [5, 8, 9],  $C$  une Courbe de Jordan contenue dans  $U$  et  $z_0$  un point de  $U$  dans  $C$  alors :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

En particulier

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

### 4.3.1 Démonstration

Soit  $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$   
 $\frac{f(z)}{(z - z_0)}$  est holomorphe sur  $C$ ,  $\gamma$  et entre  $C$  et  $\gamma$  Donc :

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)}$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz \right| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \right| dz$$

$f$  étant holomorphe en  $z_0$

$\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}$  peut être rendue arbitrairement voisine de  $f'(z_0)$  pour  $\varepsilon$  assez petit

$\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}$  admet donc un majorant  $M$  et  $\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz \leq 2\pi M\varepsilon$

On'a donc :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz = 0$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 2i\pi f(z_0)$$

---

La relation  $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  est valable pour tout point  $z_0$  intérieur à  $C$ .

L'expression  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  est continue et dérivable aussi bien par rapport à  $z$  que par rapport à  $z_0$  (la démonstration ne s'annule pas si  $z_0$  est à l'intérieur de  $C$  et  $z$  sur  $C$ )

On obtient

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{z}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

en dérivant sous le signe somme  $n$  fois par rapport à  $z_0$ .

### 4.3.2 Théorème de Cauchy

La valeur  $\int_C f(z) dz$  dépend a priori du chemin reliant les deux extrémités  $A$  et  $B$ , la question qui se pose est : Existe-t-il une classe de fonctions pour lesquels la valeur de cette intégrale ne dépend que des valeurs de  $A$  et  $B$

Si  $z \rightarrow f(z)$  est holomorphe dans un domaine simplement connexe  $D$

L'intégrale  $\int_C f(z) dz$  prend la même valeur pour tout les chemins  $C$ , inclus dans  $D$ , ayant les mêmes extrémités.

#### 4.3.2.1 Remarque

Il en résulte que l'on peut noter ce type d'intégrale par

$$\int_{z_A}^{z_B} f(z) dz$$

**Exemple**  $f(z) = z^2$

#### 4.3.2.2 Corollaire

Si  $z \rightarrow f(z)$  est holomorphe dans un domaine simplement connexe  $D$ , alors pour tout chemin fermé (courbe finie) situé dans  $D$ ;

$$\int_C f(z) dz = 0$$

## 4.4 Formule de la moyenne

**Proposition 4.1.** Soit  $f$  holomorphe sur  $U$ ,  $z_0 \in U, R > 0, \bar{D}(z_0, R) \subset U$ . Alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt = \frac{1}{\pi R^2} \int \int_{\bar{D}(z_0, R)} f(x + iy) dx dy$$

---

**Preuve 4.1.** *On utilise la formule de Cauchy :*

On sait que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \bar{D}(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} Rie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt \end{aligned}$$

## 4.4.1 Primitive

### 4.4.1.1 Une autre conséquence du théorème de Cauchy

Si  $z \rightarrow f(z)$  est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe

$D$  alors [10, 6, 8, 9] l'intégrale  $\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z)$

Considérée comme fonction de sa borne supérieure est une fonction holomorphe dans  $D$  et de plus

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(s) ds = f(z)$$

## 4.5 Inégalité de Cauchy

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Soit  $z_0 \in U$  et soit  $r > 0$  tel que le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  soit contenu dans  $U$ . Pour tout entier  $n$ , on a l'inégalité

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq r^{-n} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{it})|$$

## 4.6 Théorème de Liouville

Une fonction entière et bornée est nécessairement une constante.

**Preuve 4.2.** *Soit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{C}$$

---

On a les inégalités de Cauchy pour les coefficients de la série :

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \sup\{|f(z)|, |z| = r\}.$$

Puisqu'ici  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z$ , en laissant  $r \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$a_k = 0 \text{ si } k \geq 1.$$

## 4.7 Théorème de Morera

Soient  $D \subseteq \mathbb{C}$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Supposons que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

pour toute chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans  $D$ . Alors  $f$  est holomorphe dans  $D$ .

# Chapitre 5

## Développement en Série Taylor et en Série de Laurent

### 5.1 Développement en séries de Taylor

**Théorème 2.** (*Séries de Taylor dans  $\mathbb{C}$* )

Soit  $f$  une fonction analytique en tout point du disque ouvert [6, 8, 9]

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \text{ où } z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < R \leq +\infty$$

Alors il existe une suite unique  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D.$$

De plus,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

où

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$$

et  $\rho$  est un rayon quelconque tel que  $0 < \rho < R$ .

---

## 5.2 Séries de Laurent et Résidus

### 5.3 Les couronnes

#### 5.3.1 Définition

$\forall z \in \mathbb{C}$ , et  $0 < R_1 < R_2$   
 $ann(z_0, R_1, R_2)$  est la couronne ouverte de centre  $z_0$  et de rayon  $R_1$  et rayon  $R_2$  définie

$$ann(z_0, R_1, R_2) = \{\forall z \in \mathbb{C}, R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Si on a l'égalité, on dit que la couronne est [4, 8, 2] fermée définie par

$$\overline{ann}(z_0, R_1, R_2) = \{\forall z \in \mathbb{C}, R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$$

Si  $R_1 = 0$ ,  $ann(z_0, 0, R_2) = \dot{D}(z_0, R_2)$  et on l'appelle disque pointé.

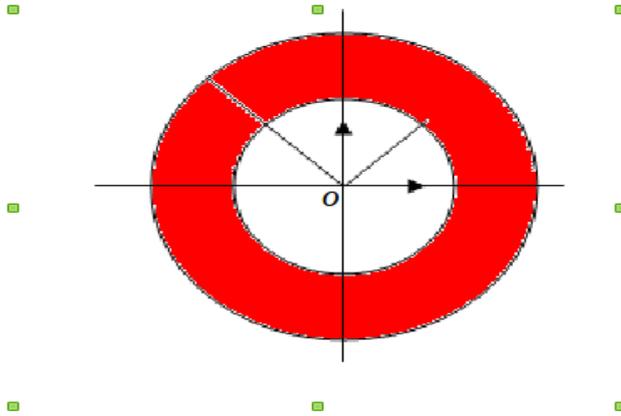


FIGURE 5.1 – La couronne

## 5.4 Série de Laurent

#### 5.4.0.1 Proposition

Soit  $f$  analytique sur  $ann(z_0, r_1, r_2)$ , alors  $\forall z \in ann(z_0, r_1, r_2)$ ,  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$   
avec :

$$C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'$$

---

$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$   $C_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z') dz'$  et  $\gamma$  un contour quelconque orienté positivement, inclus dans la couronne et entourant de  $z_0$  Ce développement est [11, 7, 9] appelé développement en série de Laurent et il est unique.

**Démonstration**  $\gamma$  est homotope à un contour  $T$  proche de  $\gamma_1 - \gamma_2$  et entourant  $z_0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[ \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \right] \end{aligned}$$

On fait le développement de Taylor de  $f$  sur  $\gamma_2$ , ce que donne les  $C_n$  pour  $n \geq 0$   
Pour  $\gamma_1$  on'a :

$$|w - z_0| < |z - z_0|$$

Il faut donc refaire le même raisonnement que pour Taylor mais en considérant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

On obtient ainsi les  $C_n$  pour  $n \leq 0$ .

**Remarque :**

Si  $f$  est analytique sur  $D(z_0, r_0)$  alors les coefficients  $C_n$  sont nuls pour  $n \leq 0$

**Exemple**  $f(z) = \frac{1}{z-a}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$

$f$  possède une singularité en  $a$ . On recherche le développement en série de Laurent de  $f$  autour de  $z_0 = 0$

1<sup>ere</sup> cas :  $|z| < a$ ,  $f$  est analytique sur  $D(0, r)$  avec  $|z| < r < a$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \\ &= -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \dots$$

2<sup>ème</sup> cas :  $|z| > a$ ,  $f$  est analytique sur  $C(0, r_1, r_2)$  avec  $a < r_1 < |z| < r_2$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \dots$$

## 5.4.1 Les points singuliers

### 5.4.1.1 Définition

Soit  $z_0$  un point au voisinage duquel  $f$  n'est pas analytique. On dit que  $z_0$  est un point singulier de  $f$ . Soit  $z_0$  un point singulier de  $f$ . S'il existe un disque ouvert pointé (privé de  $z_0$ ) de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$  dans lequel  $f$  est analytique, alors on dit que  $z_0$  est un point singulier isolé.

**Exemple**  $f : z \rightarrow \frac{1}{z-2}$ , le point  $z_0 = 2$  est un point singulier isolé.

$f : z \rightarrow \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ , le point  $z_0 = 0$  est un point singulier non isolé.

Dans tout ce qui suit, on supposera les points singuliers isolés [6, 7, 8, 9].

Dans le cadre de cette hypothèse, si on prend  $f$  admettant un point singulier  $z_0$ , et que l'on considère sa série de Laurent associée autour de  $z_0$  on note  $b_n = C_{-n}$  et  $a_n = C_n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

tel que :

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$  est une partie singulière.

### 5.4.1.2 Définition

Si tous les  $b_n$  sont nuls, la fonction est analytique dans  $D(0, r)$  et on dit que  $z_0$  est une singularité apparente.

---

### 5.4.1.3 Définition

Si les  $b_n$  sont tous non nuls, i.e : s'il existe un  $b_m$  non nul tel que  $b_n = 0$ , pour tout  $n > m$ , alors  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$  et  $\forall z \in D(z_0, r)$ .

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots$$

si  $m = 1$  on dit que a un pôle simple.

### 5.4.1.4 Définition

S'il existe une infinité de  $b_n$  non nuls, la singularité est dite essentielle

#### Exemple

1.  $z \rightarrow \frac{\sin z}{z}$  :  
 $z_0 = 0$  est une singularité les  $b_n$  sont tous nuls et on'a :

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{(-1)^{\frac{n}{2}}} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$z \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

est analytique et  $z_0$  est une singularité apparente.

2.  $z \rightarrow \frac{1}{z-2}$  :  $z_0 = 2$  est une singularité c'est un pôle d'ordre 1

3.  $z \rightarrow e^{\frac{1}{z}}$  :  $z_0 = 0$  est une singularité

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots$$

$a_0 = 1$ ,  $a_n = 0 \forall n > 0$ ,  $b_n = \frac{1}{n!}, \forall n > 0$   $z_0$  est un singularité essentielle

---

# Chapitre 6

## Théorème des résidus et ses applications

### 6.1 Théorèmes des Résidus

#### Théorème 3.

Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe [3, 5, 8] de  $\mathbb{C}$  et soit  $\{b_1, \dots, b_n\}$  un nombre fini de points de  $\Omega$  isolés et distincts.

Soit de plus  $f$  analytique dans un  $\Omega - \{b_1, \dots, b_n\}$

Si on prend  $\gamma$  un contenu dans  $\Omega$  et entourant les  $b_i$ ,  $i \in [1, n]$ , sans rencontrer ces point, et orienté positivement

Alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, b_k)$$

#### 6.1.0.1 Démonstration

$$\int f(z) dz = 0 = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Or :

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = -2i\pi \text{Res}(f, b_k)$$

D'où le résultat.

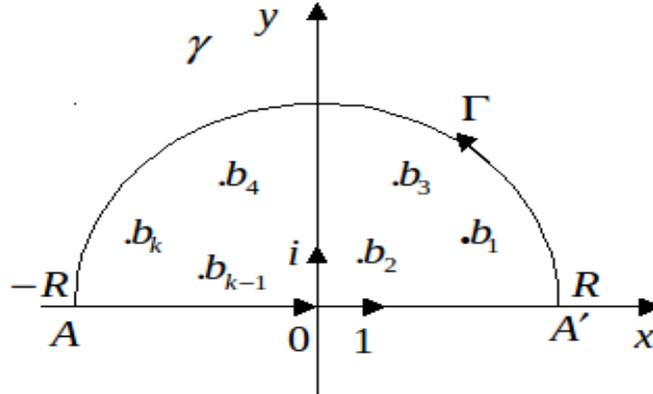


FIGURE 6.1 – Les points singulières

## 6.2 Résidu en un point singulier isolé

### 6.2.1 Définition

Soit  $z_0$  un point singulier de  $f$ , soit  $\dot{D}(z_0, r)$  un disque pointé ne contenant pas de point singulier de  $f$  :

$$\forall z \in \dot{D}(z_0, r),$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Le coefficient  $b_1$  est appelé résidu de  $f$  en  $z_0$  et noté  $Res(f, z_0)$

On'a donc :  $Res(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz$  ou  $\gamma$  est un contour orienté positivement est  $\gamma$  inclus dans  $\dot{D}(z_0, r)$  et entourant  $z_0$

#### 6.2.1.1 Remarque

Si  $z_0$  est une singularité apparente de  $f$  alors  $Res(f, z_0) = 0$

### 6.2.2 Calcul pratique de résidus

1. Si  $z_0$  est un pôle simple  $f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z)$

Où :  $g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$  est une fonction analytique aux voisinage

---

de  $z_0$  et nulle en  $z_0$ , on a donc :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = b_1$$

Alors :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

2. Si  $z_0$  est un pôle d'ordre  $m$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

En pratique il vaut mieux calculer directement le développement pour des pôles d'ordres élevés

### 6.2.2.1 Proposition

Soit  $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$  avec  $g$  une fonction analytique au voisinage de  $z_0$  et telle que  $g(z_0) \neq 0$   
On'a :

$$\text{Res}(f, z_0) = g(z_0)$$

### 6.2.2.2 Proposition

Soit  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  avec  $h$  et  $g$  deux fonctions analytiques au voisinage de  $z_0$ , et tel que  $g(z_0) \neq 0$  et  $z_0$  est un zéro simple de  $h$  on'a alors :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \\ &= g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \end{aligned}$$

---

## 6.3 Les lemmes de Jordan

### 6.3.1 Lemme 1

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un secteur  $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$  ( $\theta$  désignant l'argument de  $z$ ), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

$$\left( \text{resp. } \lim_{|z| \rightarrow 0} z f(z) = 0 \right)$$

pour  $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ , alors l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

(ou  $\gamma$  est un arc de cercle de rayon  $R$  contenu dans le secteur  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ )

tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini (resp. vers 0).

### 6.3.2 Lemme 2

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un secteur  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  du demi-plan supérieur (resp. du demi-plan inférieur), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées.

Si  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , pour  $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$

Alors : Pour  $k \geq 0$ , (resp.  $k \leq 0$ )

l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z) e^{ikz} dz$  étendu à un cercle  $\gamma$  de rayon  $R$  dans le secteur  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ,

tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini.

Ce lemme est très souvent utilisé lors du calcul de transformées de Fourier pour la méthode des résidus.

### 6.3.3 Lemme 3

Si  $f$  est une fonction possédant un pôle simple à l'origine on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i\pi \text{Res}(f, 0)$$

Ou  $r$  est positif et  $\gamma : t \rightarrow r e^{i\pi t}, t \in [0, 1]$

---

## 6.4 Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx :$

### 6.4.1 Définition :

Considérons une fonction  $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  dont la fonction à variable complexe [10, 11, 7] associée, holomorphe sur  $\mathbb{C}$  sauf en un nombre fini de singularités isolées.

On va désigner par  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  les singularités de  $f(z)$  qui appartiennent au demi-plan supérieur

$$H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$$

La courbe  $\gamma$  est simple fermée borde un domaine du demi-plan supérieure contenant certaines singularités de  $f(z)$

Donc si pour tout réel  $R > \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$  on intègre la fonction  $f(z)$  sur la courbe  $\gamma$  par courbe dans le sens trigonométrique et qui est constituée par l'intervalle  $[-R, R]$  et le demi-cercle  $C_R$  de centre l'origine et de rayon  $R$  Le théorème des résidus implique

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k) \end{aligned}$$

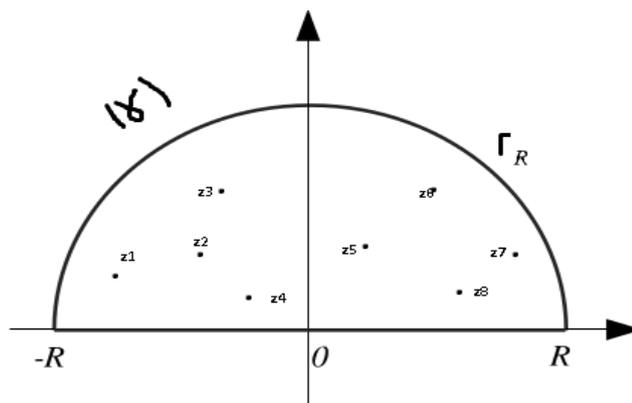


FIGURE 6.2 – Le chemin associé

---

Le lemme de Jordan permet de calculer la valeur de la limite de l'intégrale curviligne [3, 9, 8]  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz$  lorsque  $R$  tend vers l'infini pour certaines fonction  $f(z)$  Par conséquent, si on fait tendre le réel  $R > 0$  vers l'infini on obtient l'expression suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz + 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res(f(z), z_k)$$

#### 6.4.1.1 Exemple

Pour tout  $0 < a < b$  calculons l'intégrale simple généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx$$

Notons que cette intégrale converge car à l'infini la fonction

$$\frac{x^2}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}$$

est équivalente à la fonction  $\frac{1}{x^2}$  et on'a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \text{ converge et que la fonction :}$$

$f(z) = \frac{z^2}{(a^2 + z^2)(b^2 + z^2)}$  est holomorphe sur le demi-plan supérieur sauf aux points  $ia$  et  $ib$

Donc puis que  $\lim_{z \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$ ; le lemme de Jordan combiné avec le théorème des résidus impliquent qu'on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx &= 2\pi i [Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)] \\ &= 2\pi i \left[ \frac{(ia)^2}{(2ib)(b^2 - a^2)} + \frac{(ib)^2}{(-b^2 + a^2)(2ib)} \right] \\ &= \frac{\pi}{b + a} \end{aligned}$$

---

## 6.5 Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx :$

### 6.5.1 Définition :

Considérons une fraction rationnelle  $\frac{p(x)}{Q(x)}$  dont le dénominateur  $Q(x)$  ne possède pas des racines réelles et son degré de  $Q(x)$  est supérieur ou égale au degré de  $P(x)$  plus un (i.e  $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x)) + 1$ ).

Le calcul de l'intégrale simple  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$  sera fait selon le signe du paramètre  $\alpha$ .

1. **Le paramètre  $\alpha > 0$  :** Dans ce cas on choisit un réel  $R > 0$  strictement supérieur aux modules des racines  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  de  $Q(z)$  qui appliquant au demi-plan supérieur  $H$  et puis on intègre la fonction  $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$  sur la courbe simple fermée  $\Gamma_R$  constituée par l'intervalle  $[-R, R]$  et le demi-cercle  $C_R \subset H$  centré à l'origine de rayon  $R$ . Donc : d'après le théorème des résidus on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz &= \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right) \end{aligned}$$

Notons que puisque  $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(z)) + 1$  il s'ensuit que :

$\frac{P(z)}{Q(z)}$  tend vers zéro quand  $z$  tend l'infini.

Donc : la fonction

$$M(R) = \sup \left\{ \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| ; z = Re^{i\theta} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi \right\} \longrightarrow 0$$

Quand  $R \longrightarrow +\infty$  Ainsi, puisque le module

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \right| &\leq M(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R \theta/\pi} d\theta \\ \text{Car } \sin(\theta) &\geq 2\theta/\pi \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\leq \frac{\pi M(R)}{\alpha R} [1 - e^{-\alpha R}] \end{aligned}$$

On déduit que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0$ .

Par conséquent l'intégrale simple généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right).$$

2. **Le paramètre**  $\alpha < 0$  : On désigne par  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  les racines de  $Q(x)$  qui

appartiennent au demi-plan inférieur  $H^-$ , pour tout le réel  $R$ , tel que

$$R \geq \max(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|)$$

on intègre la fonction  $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$  sur la courbe fermée  $\Gamma_R$  constituée par le demi-cercle  $C_R = \{R e^{i\theta}; \in [-\pi, \pi]\} \subset H^-$  et l'intervalle  $[-R, R]$  parcouru dans le sens opposé. Comme ci-dessus en appliquant le théorème des résidus sur  $\Gamma_R$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz &= - \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, u_k \right) \end{aligned}$$

Et ainsi le passage à la limite sur  $R$  vers l'infini implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, u_k \right)$$

### 6.5.1.1 Exemple :

Pour tout réels  $a > 0$  et  $b > 0$  calculons l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2} dx$

D'après la méthode décrite ci-dessus en intégrant la fonction  $\frac{e^{ibz}}{a^2 + z^2}$  sur la courbe simple fermée  $\Gamma_R$ , constituée par un demi-cercle  $C_R$  contenu dans le demi-plan supérieur  $H$  centré à l'origine et de rayon  $R > 0$  et l'intervalle  $[-R, R]$ , on obtient lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2 + a^2} dx &= 2\pi i \text{Rés} \left( \frac{e^{ibz}}{z^2 + a^2}, ia \right) \\
&= 2\pi i \frac{e^{-ba}}{2ia} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^2 + a^2} dx \\
&= \frac{\pi e^{-ba}}{a}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ba} \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba}
\end{aligned}$$

On fait le changement  $y = -x$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{\cos(bx)}{(x)^2 + a^2} (-dx) &= \int_{+\infty}^0 \frac{\cos(-by)}{(-y)^2 + a^2} (-dy) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\cos by}{y^2 + a^2} dy \\
\Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ba}$$

## 6.6 Calcul des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x) x} dx$ :

### 6.6.1 Définition :

Dans ce paragraphe, on va adapter la méthode décrite au paragraphe précédent au cas des fonctions  $\frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x) x}$  avec  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  est une fonction rationnelle tel que le polynome  $Q(x)$  ne possède pas des racines et son  $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x))$

Notons que dans ces conditions pour l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x) x} dx$  il suffit qu'on intègre la fonction

$$\frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x) x}$$

sur la courbe fermée  $\Gamma_{r,R}$ , constituée par le demi-cercle

$$C_R = \{R e^{i\theta}; \theta \in [0, \pi]\}$$

---

si  $\alpha > 0$  mais si  $\alpha < 0$  on prend  $\theta \in [-\pi, 0]$ , l'intervalle

$$I_- = [-R, -r]$$

le demi cercle

$$C_r = \{re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]\}$$

et enfin l'intervalle

$$I_+ = [r, R],$$

$$r < \min(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et

$$R > \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

Donc, d'après le théorème des résidus on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx &= \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_r^-} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &+ \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^n \text{Rés} \left( \frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x)}, z_k \right) \end{aligned}$$

Notons aussi que si on procède comme ci-dessus on vérifie que l'intégrale

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

tend vers zéro quand le rayon  $R$  tend vers  $+\infty$  pour calculer la limite de l'intégrale

$$\int_{C_r^-} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

lorsque  $r \rightarrow 0$ , on va démontrer le 2<sup>ieme</sup> lemme de Jordan.

---

## 6.7 Calcul des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ avec $-1 < \alpha < 0$

### 6.7.1 Définition :

Dans ce paragraphe étant donnée une fraction [5, 6, 10, 9, 11]

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

qui a que des pôles non réels tel que le

$$\text{deg}(Q(x)) \geq \text{deg}(P(x)) + 1$$

On va décrire une méthode qui permet de calculer les intégrales généralisées de type

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

avec  $-1 < \alpha < 0$ .

Notons d'abord que si dans l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

On effectue le changement de variable  $x = e^t$   
on obtient  $dx = e^t dt$  que :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+1)t} \frac{P(e^t)}{Q(e^t)} dt$$

Notons aussi que si  $u = \log(z)$  désigne la détermination principale du logarithme complexe telle que  $\arg(z) \in ]0, 2\pi[$

on déduit que si  $z_0 \neq 0$  est un pôle de la fraction  $\frac{P(z)}{Q(z)}$

alors, le nombre complexe  $u_0 = \log(z_0)$  est singularité de la fonction  $\frac{P(e^u)}{Q(e^u)}$ .

Suite à ces remarques on déduit que pour calculer l'intégrale de type  $\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ,

il suffit qu'on applique le théorème des résidus à la fonction

$$e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}$$

sur le rectangle  $C_R$  indique sur la figure suivante

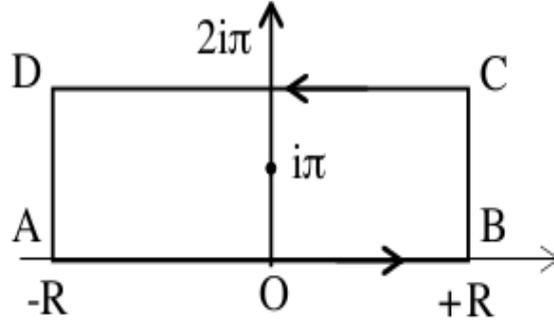


FIGURE 6.3 – Le chemin associe

$$\begin{aligned}
 \int_{ABCD} e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)} du &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left( e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}, u_k \right) \\
 \int_{ABCD} e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)} du &= \int_{-R}^R e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx + i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)(R+iy)} \frac{P(e^{R+iy})}{Q(e^{R+iy})} dy \\
 &+ \int_R^{-R} e^{(\alpha+1)(x+2\pi i)} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx + i \int_{2\pi}^0 e^{(\alpha+1)(-R+iy)} \frac{P(e^{-R+iy})}{Q(e^{-R+iy})} dy \\
 &= (1 - e^{2\pi(\alpha+1)i}) \int_{-R}^R e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx \\
 &+ i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)(R+iy)} \frac{P(e^{R+iy})}{Q(e^{R+iy})} dy \\
 &- i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)(-R+iy)} \frac{P(e^{-R+iy})}{Q(e^{-R+iy})} dy
 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout réel  $R > 0$  assez grand on a :

$$\left| e^{(\alpha+1)(R+iy)} \frac{P(e^{R+iy})}{Q(e^{R+iy})} \right| \simeq e^{(\alpha+1)R} \frac{C}{e^{nR}}$$

et

$$\left| e^{(\alpha+1)(-R+iy)} \frac{P(e^{-R+iy})}{Q(e^{-R+iy})} \right| \simeq R^{-(\alpha+1)R} C$$

Ou  $n \in \mathbb{N}^*$  on déduit que si  $R \rightarrow \infty$  on obtient les deux expressions suivantes :

---


$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\frac{-\pi e^{-\alpha i}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left( z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k \right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha i}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left( e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}, x_k \right)$$

### 6.7.1.1 Exemple :

Pour tout  $0 < \alpha < 1$  calculons l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$

Pour calculer cette intégrale nous considérons le rectangle  $\Gamma_R$  dont les cotés sont  $[-R, R]$ ,  $[R; R+2\pi i]$ ,  $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$  et  $[-R+2\pi i, -R]$  (voir la figure) et nous appliquerons le théorème des résidus à la fonction ;

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} \text{ Sur } \Gamma_R$$

La courbe  $\Gamma_R$  est simple fermée et borde un rectangle du demi-plan supérieur qui contient le pôle simple  $\pi i$  de  $f(z)$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \pi i) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{(z - \pi i) e^{\alpha z}}{1 + e^z} \\ &= 2\pi i \frac{e^{\alpha \pi i}}{e^{\pi i}} \\ &= -2\pi i e^{\alpha \pi i} \end{aligned}$$

Observons que par définition d'une intégrale curviligne on peut écrire ;

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \\ &+ \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{(x+2\pi i)}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy \\ &= (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \\ &- \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy \end{aligned}$$

Ainsi puis que le paramètre  $0 < \alpha < 1$  et pour tout réel  $y \in [0, 2\pi]$

On'a ;

$$\left| \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} \simeq e^{(\alpha-1)R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy = 0$$

et :  $\left| \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}} \simeq e^{-\alpha R}$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy = 0$$

On en déduit que si  $R$  tend vers l'infini on obtient :

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

Par conséquent , pour tout réel  $0 < \alpha < 1$  l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

## 6.8 L'intégrale sous forme $\int_a^b f(x) dx$ avec $a, b$ des points singuliers de $f$

Donc on choisit un chemin  $\gamma$  qui contient le morceau  $[a, b]$  comme l'exemple suivant :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2(\sqrt{1-x^2})}$$

On prend

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(\sqrt{1-z^2})}$$

donc  $z_0 = 1, z_1 = -1$  sont des points singuliers de  $f$  et on a aussi  $z_2 = i, z_3 = -i$  deux pôles d'ordre 2

$$(z-1) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad \text{alors } 1-z = r_1 e^{i(\theta_1+\pi)}.$$

$$(z+1) = r_2 e^{i\theta_2}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$$

Alors

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{1-z^2} \\ &= \sqrt{(z+1)(1-z)} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \pi}{2}\right) + k\pi i}, \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$

Si on prend  $k = 0$  donc

$$\begin{aligned} g(i) &= \sqrt{\sqrt{2} * \sqrt{2}} * e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi\right)} \\ &= \sqrt{2} e^{\pi i} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

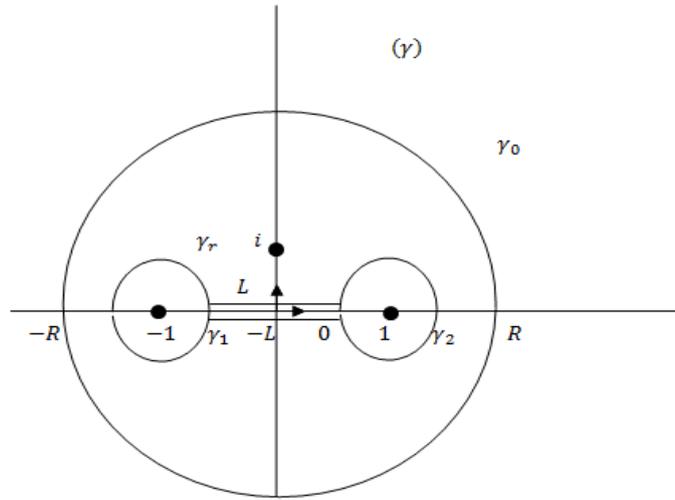


FIGURE 6.4 – le chemin  $\gamma$  associé à l'exemple

$$\begin{aligned} g(-i) &= \sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= +\sqrt{2} \end{aligned}$$

On prend  $\gamma$  :

$$\gamma = \Gamma \cup \{-L\} \cup \gamma_0 + DC + \gamma_1 + AB + \gamma_2 + L$$

(notre fonction  $\sqrt{1-z^2}$  est analytique et une seule valeur.)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2 \sqrt{1-z^2}}$$

quand  $z \in (AB)$

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\pi + \pi}{2}\right)}, \theta_1 + \theta_2 = \pi \\ &= \sqrt{r_1 r_2} \\ &= -\sqrt{(1-x)(1+x)} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$z \in (CD) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 3\pi$ , alors

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{4\pi}{2}\right)} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} \\ &= \sqrt{1-u^2} \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{-L} f(z) dz + \int_L f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz \\
&+ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{DC} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\
&= \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz \\
&+ \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{-1+r}^{1-r} f(z) dz + \int_{1-r}^{-1+r} f(z) dz
\end{aligned}$$

$z = Re^{i\theta}$  alors

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{1}{(1+z^2)^2 + \sqrt{1+z^2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{(R^2+1)^{5/2}} \\
\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma} |f(z)| dz \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{R}{(R^2+1)^{3/2}} dz \\
&= \frac{2\pi R}{(R^2+1)^{3/2}} \\
&\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

$z \in \gamma_2$  alors  $z = 1 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \frac{1}{(1+z^2) \sqrt{(1-z)(1+z)}} \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{r}} \\
\int_{\gamma_2} f(z) dz &\leq \frac{\pi r}{\sqrt{r}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

Sur  $\gamma_0$  est la même chose :  $\int_{\gamma_0} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$ .

Sur  $\gamma_1$  :  $z = -1 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi r}{\sqrt{r}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

---


$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) \\
&= 2\pi i \left( \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2 \sqrt{1-z^2}} \right) \right) \\
&\quad + 2\pi i \left( \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left( \frac{(z+i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2 (\sqrt{1-z^2})} \right) \right) \\
&= 2\pi i \left( \frac{-6}{16\sqrt{2}} + \frac{-6}{16\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{-12}{8\sqrt{2}} \pi \\
&= \frac{-3\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Donc quand on passe à la limite  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
2 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4} \\
\Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{-3\pi\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

## 6.9 Principe de l'argument

**Théorème 4.** Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe dans un domaine  $[6, 1, 8]$  simplement connexe  $\Omega$

Soit  $\gamma$  un chemin fermé contenu dans  $\Omega$  entourant tous les pôles et zéros de  $f(z)$  dans  $\Omega$ . Alors

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

## 6.10 Théorème de Rouché

**Théorème 5.** Soient  $f(z)$  et  $g(z)$  deux fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe  $\Omega$  et sur sa frontière  $\gamma$ .

Supposons qu'en tout point de  $\gamma$ , on ait  $|f(z)| > |g(z)|$ . Alors  $f(z)$  et  $f(z) + g(z)$  ont le même nombre de zéros dans  $\Omega$ .

---

# Conclusion

Dans ce cours, nous avons présenté comment construire l'ensemble  $\mathbb{C}$  et on a défini les opérateurs sur cet ensemble. Après, on a défini de la fonction de la variable complexe, les fonctions holomorphes, les fonctions analytiques, les conditions de Cauchy-Riemann et les fonctions harmoniques. Ensuite on a défini les fonctions exponentielle, logarithme, circulaires, hyperboliques et puissances. On a présenté le Calcul intégral et l'utilisation d'intégrale curviligne, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, formule de la moyenne, formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, inégalité de Cauchy et théorème de Liouville-Théorème de Morera. On a présenté aussi le développement en série Taylor et en série de Laurent et singularité isolées d'une fonction complexe. Enfin une application de théorème des résidus avec des exemples et des exercices et les solutions.

---

# Bibliographie

- [1] Michèle Audin. Analyse complexe. *Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS*, 2011.
- [2] B. Belaidi. Analyse complexe cours et exercices corrigés. *Deuxième édition*, page 245, 2009.
- [3] C.M. Bethke. Geochemical reaction modeling : Concepts and applications. *Oxford university Press US*, 1996.
- [4] John B. Conway. Functions of one complex variable. *Springer-Verlag, New York*, 1978.
- [5] P. Eyssidieux. Analyse complexe. *Lyon*, 2013-2014.
- [6] André Giroux. Analyse complexe : Cours et exercices corrigés. *Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal*, 2013.
- [7] A. Lesfari. Analyse complexe. *SMA 6*, 2014-2018.
- [8] B. Chabat M. Lavrentiev. Méthode de la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Edition Mir, Moscou*, 1977.
- [9] W. Rudin. Analyse réelle et complexe, cours et exercices. 1987.
- [10] V. Smirnov. Cours de mathématiques supérieures. *Tome 3, OPU*, 1985.
- [11] G. Dennis Zill and D. Patrick Shanahan. Complex analysis. *Jones and Bartlett Publishers*, 2003.