### 0.0.1 EDs homogènes :

**Définition 0.1** (*fonctions homogènes*)
*Une fonction $f(x, y)$ est dite homogène de ses arguments de degré $n$ si elle vérifie l'identité*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n = f(x, y)$$

**Exemple 0.1** *Montrons que $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ est une fonction homogène :*
*En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 xy \\ &= \lambda^2 (x^2 + y^2 + xy) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

*Donc $f$ est une fonction homogène d'ordre 2.*

**Exemple 0.2** *Montrons que $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est une fonction homogène :*
*En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

*Donc $f$ est une fonction homogène d'ordre 0.*

**Définition 0.2** (*ED homogène*)
*Une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ est dite homogène lorsque la fonction $f(x, y)$ est homogène de degré zéro.*

**Remarque 0.1** *Une équation différentielle homogène peut se mettre toujours sous la forme :*

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

### 0.0.2 La résolution d'une équation différentielle homogène :

Soit l'équation différentielle homogène :

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad (*).$$

Posons $\dfrac{y}{x} = u$, donc $y = ux \Longleftrightarrow y' = xu' + u$ alors

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad xu' + u = f(u) \\
&\Longleftrightarrow \quad xu' = f(u) - u \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation (*) sont définies par :

$$y = xu, \quad \text{et} \qquad x = ke^{\int \frac{du}{f(u)-u}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 0.3** *Réoudre l'équation suivante*

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \qquad (**).$$

*En effet pour $x \neq 0$ on a*

$$\begin{aligned}
(**) \quad &\Longleftrightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.
\end{aligned}$$

*Posons $\dfrac{y}{x} = u$, donc $y' = xu' + u$, alors*

$$\begin{aligned}
(**) \quad &\Longleftrightarrow \quad xu' + u = \sqrt{1 - u^2} + u \\
&\Longleftrightarrow \quad xu' = \sqrt{1 - u^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \arcsin u = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \sin\Big(\ln|x| + c\Big), \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = x \sin\Big(\ln|x| + c\Big), \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$