0.1 EDs se ramenant aux équations homogènes

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\Big) \qquad (*)$$

où a, a', b, b', c, c', sont des constantes réelles et f est une fonction continue.
1. Si $c = c' = 0$ l'équation $(*)$ est homogène.
2. Lorsque l'un au moins des nombres c, c' est différent de zéro, il convient de distinguer deux cas :
2.1 Le déterminant $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$
En introduisant les nouvelles variables α et β définies par les formules :

$$\begin{cases} x = \alpha + k \\ y = \beta + l \end{cases}$$

où k et l sont pour l'instant des constantes indéterminées. Alors

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = f\Big(\frac{a\alpha + b\beta + ak + bl + c}{a'\alpha + b'\beta + a'k + b'l + c'}\Big)$$

En choisisant k et l comme solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ak + bl + c = 0 \\ a'k + b'l + c' = 0. \end{cases} \qquad (\triangle \neq 0)$$

On obtient une équation différentielle homogène

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\Big(\frac{a\alpha + b\beta}{a'\alpha + b'\beta}\Big).$$

En cherchant son intégrale générale et en y remplaçant α par $(x-k)$ et β par $(y-l)$ on obtient l'intégrale générale de $(*)$
2.2 Le déterminant $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, dans ce cas il existe un réel tel que

$$a' = a, \qquad b' = b$$

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{(ax+by)+c}{(ax+by)+c'}\Big)$$

la substitution $z = ax + by$ se ramène cette équation à une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 0.1 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0 \qquad (*).$$

Considérant le système linéaire

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$$

Exemple 0.2 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0 \qquad (**).$$

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$$