0.1 Equations différentielles non linéaires

0.1.1 Equation de Bernoulli

Ce sont des équations du premier ordre qui peuvent se ramener à une équation linéaire.

Définition 0.1 *On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \in (\mathbb{R}^* - \{1\})$$

où a, b, et f sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(x) \neq 0$ sur I.

Méthode de résolution : En divisant par y^{α} on obtient :

$$a(x)y'y^{-\alpha} + b(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

le changement de fonction défini par $z = y^{1-\alpha}$ conduit à une équation linéaire.
En effet

$$z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$$

d'où

$$\frac{z'}{1-\alpha}a(x) + b(x)z = f(x)$$

ou encore

$$a(x)z' + (1-\alpha)b(x)z = (1-\alpha)f(x)$$

Exemple : Intégrer l'équation $(y \neq 0)$

$$y - xy' = 2xy^2. \tag{1}$$

En divisant (1) par y^2 on obtient :

$$\frac{1}{y} - x\frac{y'}{y^2} = 2x$$

en posant $z = \dfrac{1}{y}$ soit $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$ équation (1) devient :

$$z + xz' = 2x$$

équation linéaire admettant $z = x$ pour solution particulière. l'équation homogène associée peut s'écrire

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

et admet pour intégrale générale $z = \dfrac{c}{x}$ d'où $z = x + \dfrac{c}{x}$ $\quad c \in \mathbb{R}$
et par conséquent

$$y = \frac{1}{x + \frac{c}{x}} = \frac{x}{x^2 + c} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

0.1.2 Equation de Riccati

Ce sont des équations de Bernoulli avec $\alpha = 2$ et second membre.

Définition 0.2 *On appelle équation de Riccati une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b, et c sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(x) \neq 0$ sur I.

Exemple : Intégrer l'équation

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1. \tag{2}$$

Il est facile de vérifier que $y_p = x$ est une solution particulière de (2).
En posant $y = x + z$ donc $y' = 1 + z'$,

$$(2) \Longleftrightarrow 1 + z' = (x+z)^2 - 2x(x+z) + x^2 + 1$$

soit après simplification : $z' = z^2$

$$\begin{aligned} z' = z^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z'}{z^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z} = -x + c \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc l'intégrale générale de (2) est :

$$y = x - \frac{1}{x - c} \qquad c \in \mathbb{R}.$$