Espaces métriques

Cours et TD

Licence de Mathématiques, troisième année
Centre de Télé-enseignement, Université de Franche-Comté

Louis Jeanjean

Université de Franche-Comté, Laboratoire de Mathématiques,
16 route de Gray, 25030 Besançon cedex
louis.jeanjean@univ-fcomte.fr, tél. 03 81 66 63 21

12 octobre 2009

Quelques précisions sur le cours d'espaces métriques

1) Structure du document

Le document contient :

- Le cours proprement dit qui comporte six Chapitres.
- Des exercices corrigés correspondant à chacun des six Chapitres
- Les énoncés des trois devoirs, correspondant aux chapitres 1-2, 3 et 4-5-6 respectivement.

2) Organisation du travail

Chacun est libre de s'organiser à sa convenance pour assimiler le cours. Cependant il me semble judicieux de ne pas attendre de rendre un devoir pour commencer à étudier le chapitre suivant. Vous risqueriez d'être pris par le temps en fin de semestre.

A la fin de chaque section sont indiquées les numéros des exercices qui sont à traiter dans le cadre des *travaux dirigés*. Les énoncés et les solutions de ces exercices se trouvent dans la deuxième partie "Travaux dirigés". Il est souhaitable d'essayer de résoudre ces exercices, sans faire appel au corrigé.

Bibliographie : Le document est concu pour être autosuffisant à partir des connaissances acquisent en L2. Si vous envisagez vraiment à acheter un livre vous pouvez me consulter avant.

Il est très probable due vous y trouviez des imprécisions et des erreurs (de frappe ou même de contenu). Merci d'avance de me les signaler, par exemple à l'occasion d'un rendu de devoir, où directement par email.

3) Calendrier

Les dates ci-dessous sont à respecter si vous souhaitez une correction personalisée. Dans tout les cas une solution détaillée vous sera envoyée peu après la date prévue de remise du devoir.

- Devoir 1 : Le 5 novembre 2009
- Devoir 2 : Le 15 décembre 2009
- Devoir 3 : Le 5 janvier 2010.

Je vous souhaite un bon semestre.

Louis Jeanjean

Table des matières

Première partie

Cours (20h)

Chapitre 1

Généralités sur les espaces métriques

1.1 Notion d'espace métrique

Définition 1.1.1 (Distance) *Soit E un ensemble quelconque. On appelle* distance *sur E une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :*

(i) $d(x,x) = 0, \forall x \in E$ *et* $d(x,y) > 0, \forall x, y \in E, x \neq y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in E$ *on a*

$$d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z) \quad \textit{(inégalité triangulaire).}$$

Définition 1.1.2 (Espace métrique) *Si E est un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une distance sur E le couple (E,d) s'appelle* espace métrique.

Définition 1.1.3 (Boules ouvertes et fermées) *Soit (E,d) un espace métrique. Soit $x \in E$ et $r > 0$. L'ensemble*

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$$

s'appelle boule ouverte de centre x et de rayon r. *L'ensemble*

$$B'(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leqslant r\}$$

s'appelle boule fermée de centre x et de rayon r.

Remarque 1.1.4 *Il est essentiel de réaliser que la notion de boule ouverte et celle d'ouvert qui va suivre dépend de la distance choisie, voir l'Exercice 1.1.*

Définition 1.1.5 (Ensemble ouvert) *Soit (E,d) un espace métrique. Un ensemble $O \subset E$ est dit* ouvert *si pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset O$.*

Remarque 1.1.6 (Une boule ouverte est toujours un ouvert) *Soit $B(x, r)$ une boule ouverte et $y \in B(x, r)$. Alors $d(x, y) < r$. Soit $r_y > 0$ tel que $r_y < r - d(x, y)$. Alors si $z \in B(y, r_y)$ on a*

$$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) < r_y + d(y, x) < (r - d(x, y)) + d(y, x) = r.$$

Donc $z \in B(x, r)$. Ainsi $B(y, r_y) \subset B(x, r)$.

Théorème 1.1.7 (Propriétés des ensembles ouverts) *Soit (E, d) un espace métrique. Alors*

i) $\emptyset$ et E sont des ouverts.
ii) Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $\cup_{i\in I} O_i$ est ouvert.
iii) Si $O_1, O_2, ..., O_n$ sont des ouverts, alors $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$ est ouvert.

Démonstration.

(i) Evident.

(ii) Soient $O = \cup_{i\in I} O_i$ et $x \in O$. Alors $\exists i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert $\Longrightarrow \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_{i_0} \Longrightarrow B(x, r) \subset \cup_{i\in I} O_i = O$. Comme $x \in O$ était quelconque $\Longrightarrow O$ est ouvert.

(iii) Soit $x \in O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$. Alors $x \in O_1, x \in O_2, \ldots, x \in O_n$. Comme chaque O_i est un ouvert, il existe $r_1 > 0, r_2 > 0, \ldots, r_n > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset O_1, B(x, r_2) \subset O_2 \ldots B(x, r_n) \subset O_n$. Soit $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_n) > 0$. Alors $B(x, r) \subset O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$. Donc $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$ est ouvert.

■

Remarque 1.1.8 *[Tout ouvert est une réunion de boules ouvertes] Soit $O \subset E$ un ouvert et $x \in O$. Comme O est ouvert, $\forall x \in O$, $\exists r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset O$. Posons $V = \cup_{x\in O} B(x, r_x)$. Pour tout $y \in O$ on a $y \in B(y, r_y)$ et $B(y, r_y) \subset V$. Donc $y \in V$ et on en déduit l'inclusion $O \subset V$. De plus, O contient toute les boules $B(y, r_y)$ donc leur réunion. D'où $V \subset O$ et par suite $O = V$. Bien entendu nous savons par le Théorème 1.1.7 que toute réunion d'ouverts est un ouvert et donc toute réunion de boules ouvertes est un ouvert.*

Définition 1.1.9 (Ensemble fermé) *Soit (E, d) un espace métrique. Un ensemble $F \subset E$ est* fermé. *si et seulement si son complémentaire $E \backslash F$ noté $C_E F$ est un ouvert.*

Exemple 1.1.10 (Une boule fermée est un fermé) *Soit (E, d) un espace métrique et $a \in E$. Montrons que $A(a, r) = \{x \in E : d(x, a) > r\}$ est un ouvert. Si $x \in A(a, r)$ alors $d(x, a) > r$ et pour $0 < \rho < d(x, a) - r$ on a $B(x, \rho) \subset A(a, r)$. Maintenant comme $C_E A(a, r) = \{x \in E : d(x, a) \leqslant r\}$ on conclut.*

Proposition 1.1.11 (Propriétés des ensembles fermés) *Soit (E, d) un espace métrique. Alors*

(i) $\emptyset$ et E sont des fermés.

(ii) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors $\cup_{i\in I}$ est un fermé.

(iii) Si $F_1, F_2, \dots, F_k$ sont des fermés, alors $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ est un fermé.

Démonstration.

(i) C'est évident car $\emptyset = C_E E$ et $E = C_E \emptyset$.

(ii) On a $C_E(\cup_{i\in I} F_i) = \cup_{i\in I}(C_E F_i)$. Or F_i est fermé $\Longrightarrow C_E F_i$ est ouvert pour tout $i \in I$ $\Longrightarrow \cup_{i\in I}(C_E F_i)$ est ouvert.

(iii) On a $C_E(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k) = (C_E F_1) \cap (C_E F_2) \cap \cdots \cap (C_E F_k)$. Or, chaque F_i est fermé $\Longrightarrow C_E F_i$ est ouvert $\Longrightarrow (C_E F_1) \cap \cdots \cap (C_E F_k)$ est ouvert.

■

Définition 1.1.12 (Topologie) *Soit (E, d) un espace métrique. La* topologie *τ de (E, d) est la famille de tous les ouverts de E :*

$$\tau = \{O \subset E : O \text{ ouvert dans } (E, d)\}.$$

Définition 1.1.13 (Distances topologiquement équivalentes) *Soit E un ensemble sur lequel sont définies deux distances d_1 et d_2. On dira que d_1 et d_2 sont* topologiquement équivalentes *si elles définissent la même topologie, c'est à dire si elles définissent les mêmes ouverts.*

Proposition 1.1.14 *Soient d_1 et d_2 deux distances sur E. On suppose qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que*

$$C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. Soit O un ouvert de (E, d_1). Soit $a \in O$. Alors $\exists r > 0$ tel que $B_{d_1}(a, r) = \{x \in E : d_1(x, a) < r\} \subset O$. On pose $r_* = rC_1$.

Si $d_2(a, x) < r_*$, alors $d_1(x, a) \leqslant \frac{1}{C_1} d_2(x, a) < \frac{r_*}{C_1}$ et donc $d_1(x, a) < r$. D'où $x \in O$. Ainsi pour $r_* = rC_1$ on a

$$B_{d_2}(a, r_*) = \{x \in E : d_2(x, a) < r_*\} \subset O.$$

Donc O est ouvert dans (E, d_2). Réciproquement en permutant les rôles de d_1 et d_2 il vient que si O est un ouvert de (E, d_2) alors O est un ouvert de (E, d_1). Donc d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes. ■

Remarque 1.1.15 *(i) Attention que la condition donnée à la Proposition 1.1.14 n'est pas nécessaire (voir pour cela l'Exercice 1.4).*

(ii) L'intérêt de savoir que deux distances sont topologiquement équivalentes est que beaucoup de propriétés des espaces métriques sont invariantes par passage d'une distance topologiquement équivalentes à une autre.

Exercices : Résoudre les Exercices 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4.

1.2 Premiers exemples d'espaces métriques

(i) Sur $\mathbb{R}$ la fonction $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to d(x,y) = |x-y|$ est une distance. La boule ouverte $B(x,r)$ est donnée par $\{y \in \mathbb{R} : y \in]x-r, x+r[\}$. On voit sur cet exemple qu'en général une intersection d'ouverts n'est pas un ouvert. En effet on a

$$[0,1] = \cup_{n\in\mathbb{N}} \,]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$$

et $[0,1]$ n'est pas ouvert.

(ii) Si $E = \mathbb{R}^N$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \quad \text{et} \quad d_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i - y_i|$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ sont des distances. On peut le voir par calcul direct. Nous allons le déduire d'un procédé de construction de distances décrit maintenant.

On appelle *semi-distance* sur un ensemble E une application $\delta : (x,y) \in E \times E \to \delta(x,y) \in \mathbb{R}$ vérifiant

(a) $\delta(x,x) = 0, \forall x \in E$.

(b) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$.

(c) $\forall x,y,z \in E$ on a

$$\delta(x,y) + \delta(y,z) \geqslant \delta(x,z) \quad \text{(inégalité triangulaire)}.$$

La seule différence avec une distance est que l'on peut avoir $\delta(x,y) = 0$ avec $x \neq y$. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ l'application $(x,y) \to |x_i - y_i|$, $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2))$ est une semi-distance mais pas une distance. On peut montrer (voir Exercice 1.5) que si $\delta_1, \dots, \delta_n$ sont des semi-distances sur E, alors

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \quad \text{et} \quad \delta' = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \delta_i$$

sont des semi-distances. On en déduit immédiatement que d_1 et d_∞ sont des semi-distances. Il ne reste plus alors à remarquer que si $d_1(x,y) = 0$ alors $x = y$ et que $d_\infty(x,y) = 0$ implique que $x = y$ pour s'assurer que ce sont des distances.

(iii) Soit E l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soient $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. Montrons que

$$d(P,Q) \in E \times E \to \max_{0\leqslant i\leqslant n} |P(x_i) - Q(x_i)|$$

est une distance. Pour cela on utilise de nouveau le concept de semi-distance. On montre (voir Exercice 1.5) que si δ est une semi-distance sur E, alors pour tout ensemble E' et toute application $\alpha : E' \to E$, l'application

$$\delta' : (x', y') \in E' \times E' \to \delta(\alpha(x'), \alpha(y'))$$

est une semi-distance. Par suite d est une semi-distance. C'est aussi une distance puisqu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n ne peut s'annuler en $n+1$ points distincts sans être identiquement nul.

(iv) Tout ensemble peut être muni d'une distance. En effet si E est un ensemble quelconque, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ avec
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$
est une distance appelée la distance discrète. Dans cet exemple tout sous-ensemble de E est ouvert. En effet soient $A \subset E$ et $x \in A$. Alors $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset A$ (voir aussi l'Exercice 1.6).

(v) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ alors sur $E \times E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la fonction
$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$
est une distance. De même on peut vérifier que
$$d_*(x, y) = \Big| Arctan(x) - Arctan(y) \Big|$$
est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercices : Résoudre les Exercices 1.5 et 1.6.

1.3 Intérieur-Fermeture-Frontière

Définition 1.3.1 (Intérieur d'un ensemble) *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.* L'intérieur *de A, noté A° est la réunion de tout les ouverts contenus dans A. Les éléments de A° sont appelés les* points intérieurs *de A.*

Remarque 1.3.2 *Par le Théorème 1.1.7, A° est un ouvert, c'est donc le plus grand ouvert inclus dans A. On en déduit que $A \subset E$ est ouvert si et seulement si $A = A^\circ$. En effet si $A = A^\circ$, A est ouvert. Réciproquement si A est ouvert alors $A \subset A^\circ$ et comme on a toujours $A^\circ \subset A$ il vient $A = A^\circ$.*

Proposition 1.3.3 (Caractérisation de A° par les boules) *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $x \in A^\circ$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Si $x \in A^\circ$ comme A° est ouvert, par définition d'un ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A^\circ$.

$\Longleftarrow$ S'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ comme $B(x, r)$ est ouvert on a $B(x, r) \subset \{\cup O : O \text{ ouvert et } O \subset A\} = A^\circ$. ■

Définition 1.3.4 (Adhérence ou fermeture d'un ensemble) *Soit (E, d) un espace métrique et $a \in A$.* L'adhérence, *on dit aussi* la fermeture *de A, est l'intersection de tout les fermés qui contiennent A, on la note $\overline{A}$.*

Remarque 1.3.5 *(i) $\overline{A}$ est toujours un fermé (car c'est une intersection de fermés).*

(ii) $A \subset \overline{A}$ *et* $A = \overline{A}$ *si et seulement si* A *et fermé.*

(iii) Si F *est fermé et* $A \subset F$*, alors* $\overline{A} \subset F$.

Proposition 1.3.6 (Caractérisation de $\overline{A}$ par les boules) *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $A \subset E$. *Alors* $x \in \overline{A}$ *si et seulement si* $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'intérieur de $C_E A$ est égal à $C_E \overline{A}$. Supposons que $x \in E$ soit dans l'intérieur de $C_E A$ et montrons que $x \in C_E \overline{A}$. Par la Proposition 1.3.3, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset C_E A$. Alors, en passant aux complémentaires, il vient que $C_E(C_E A) \subset C_E B(x, r)$. Donc $A = C_E(C_E A) \subset C_E B(x, r)$ et puisque $C_E B(x, r)$ est un fermé on a aussi $\overline{A} \subset C_E B(x, r)$. En passant aux complémentaires il vient alors que $B(x, r) \subset C_E \overline{A}$ et donc $x \in C_E \overline{A}$. On ce point on a montré que l'intérieur de $C_E A$ est inclut dans $C_E \overline{A}$. Montrons maintenant l'inclusion inverse. Puisque $A \subset \overline{A}$ on a $C_E \overline{A} \subset C_E A$. Mais $C_E \overline{A}$ est ouvert (car $\overline{A}$ est fermé) et donc $C_E \overline{A}$ est bien inclut dans l'intérieur de $C_E A$.

Après ce préliminaire montrons l'implication directe :

$\Longrightarrow$ Soit $x \in \overline{A}$ et $r > 0$. Montrons que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Par l'absurde si $B(x, r) \cap A = \emptyset$ alors $B(x, r) \subset C_E A$. Comme $B(x, r)$ est ouvert $\Longrightarrow B(x, r)$ est dans l'intérieur de $C_E A$ qui est égal à $C_E \overline{A}$. Par suite $x \in C_E \overline{A}$ ce qui contredit l'hypothèse que $x \in \overline{A}$. On a ainsi prouvé que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Montrons maintenant l'implication réciproque :

$\Longleftarrow$ Supposons que $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et montrons alors que $x \in \overline{A}$. Par l'absurde supposons que $x \notin \overline{A}$. Alors $x \in C_E \overline{A}$ et puisque $C_E \overline{A}$ est ouvert $\exists r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0) \subset C_E \overline{A}$. On a donc $B(x, r_0) \cap \overline{A} = \emptyset$. Mais $A \subset \overline{A}$ donc $B(x, r_0) \cap A = \emptyset$. Cette contradiction montre alors que notre hypothèse était fausse et donc que $x \in \overline{A}$. ■

Définition 1.3.7 (Frontière d'un ensemble) *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $A \subset E$. *On appelle* frontière *de* A *l'ensemble* $\overline{A} \cap \overline{C_E A}$ *et on le note* ∂A.

Cette définition est justifiée par le résultat suivant qui résulte directement de la caractérisation de la fermeture d'un ensemble donnée par la Proposition 1.3.6.

Proposition 1.3.8 *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $A \subset E$. *Alors* $x \in \partial A$ *si et seulement si toute boule centrée en* x *rencontre à la fois* A *et* $C_E A$.

Exercices : Résoudre les Exercices 1.7 et 1.8.

1.4 Convergence de suites

Définition 1.4.1 (Convergence de suites) *Soit* (E, d) *un espace métrique et soit* (x_n) *une suite de* E. *On dit que* (x_n) converge *vers* $l \in E$ *et on note* $x_n \to l$ *ou* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geqslant 1 \text{ tel que } \forall n \geqslant n_\varepsilon \text{ on a } x_n \in B(l, \varepsilon).$$

La valeur $l \in E$ *est alors appelée la limite de* (x_n).

Proposition 1.4.2 (Unicité de la limite) *Si $x_n \to l_1$ et $x_n \to l_2$ alors $l_1 = l_2$.*

Démonstration. Supposons que $l_1 \neq l_2$. On choisit alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(l_1, \varepsilon) \cap B(l_2, \varepsilon) = \emptyset$. Pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on devrait avoir $x_n \in B(l_1, \varepsilon)$ car $x_n \to l_1$ et $x_n \in B(l_2, \varepsilon)$ car $x_n \to l_2$. Cette contradiction montre que $l_1 = l_2$. ■

Définition 1.4.3 (Sous-suite) *Soit $(x_n) \subset E$ une suite, une* suite extraite *(on dit aussi* sous-suite *) de (x_n) est de la forme $(x_{\phi(n)})$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

Proposition 1.4.4 (Convergence des sous-suites) *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n) \subset E$ tel que $x_n \to l \in E$. Alors toute sous-suite $(x_{k(n)})$ de (x_n) converge vers l.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $\exists n_\varepsilon \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ on a $d(x_n, l) < \varepsilon$. On a $1 \leqslant k(1) < k(2) < \cdots < k(n) < k(n+1) \ldots$. Par récurrence on a $k(n) \geqslant n$. Alors $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, $k(n) \geqslant n \geqslant n_\varepsilon$, donc $d(x_{k(n)}, l) < \varepsilon$. On a donc prouvé que $x_{k(n)} \to l$. ■

La Proposition 1.4.4 admet une réciproque très utile :

Proposition 1.4.5 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n) \subset E$ une suite. Si toute suite extraite de (x_n) converge, alors la limite est indépendante de la sous-suite et (x_n) converge vers la limite commune.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si toutes les sous-suites de (x_n) ont la même limite $l \in \mathbb{R}$, (x_n) converge vers l. Supposons par l'absurde que $\exists (x_{k(n)})$, $(x_{l(n)})$ deux sous-suites telles que $x_{k(n)} \to l_1$ et $x_{l(n)} \to l_2$ avec $l_1 \neq l_2$. Les ensembles $k(\mathbb{N})$ et $l(\mathbb{N})$ étant différent d'une infinité de termes il est possible de construire une sous-suite "mélangées" contenant une infinité de termes de $(x_{k(n)})$ et une infinité de termes de $(x_{l(n)})$. Cette sous-suite doit avoir, par hypothèse, une limite. Par construction elle n'en a pas ! ■

Proposition 1.4.6 (Caractérisation d'un fermé par les suites) *Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$. Alors F est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset F$ qui converge vers $l \in E$ on a $l \in F$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Montrons que si la propriété

$$(x_n) \subset F \text{ avec } x_n \to l \Longrightarrow l \in F$$

est vraie alors F est fermé. En fait on va montrer que $C_E F$ est ouvert. Soit $a \in C_E F$ arbitraire, montrons que $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset C_E F$. Par l'absurde si c'est faux alors $\forall n \geqslant 1$, $B(a, \frac{1}{n}) \not\subset C_E F$. Autrement dit, $\forall n \geqslant 1$, $B(a, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$. Par suite $\forall n \geqslant 1$, $\exists x_n \in F \cap B(a, \frac{1}{n})$. La suite (x_n) est contenue dans F et $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$. Donc $x_n \to a$. Par la propriété de l'énoncé on obtient donc que $a \in F$ ce qui contredit l'hypothèse que $a \in C_E F$. Donc $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset C_E F$ et donc $C_E F$ est ouvert.

Pour montrer le sens direct supposons par l'absurde que $l \notin F$. Alors $l \in C_E F$ qui est ouvert. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(l, r) \subset C_E F$. Or ceci n'est pas possible puisque $x_n \in F$ doit appartenir à $B(l, r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand. ■

Proposition 1.4.7 (Caractérisation de l'adhérence par les suites) *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $A \subset E$*. Alors* $a \in \overline{A}$ *si et seulement si il existe une suite* $(x_n) \subset A$ *telle que* $x_n \to a$*.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $a \in \overline{A}$. Alors $\forall r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Pour $r = \frac{1}{n}$ choisissons $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$. Alors la suite (x_n) est contenue dans A et puisque $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ on a $x_n \to a$.

$\Longleftarrow$ Soit $a \in E$ pour lequel il existe $(x_n) \subset A$ tel que $x_n \to a$. Montrons alors que $a \in \overline{A}$. Soit $r > 0$, fixé. Comme $x_n \to a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \in B(a, r)$. Alors $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ (car $x_{n_0} \in B(a, r) \cap A$). Par la caractérisation de $\overline{A}$ par les boules, Proposition 1.3.6, il vient que $a \in \overline{A}$. ∎

Remarque 1.4.8 *Remarquons que les notions d'intérieur, d'adhérence, de frontière, de convergence de suites sont invariantes par passage d'une distance topologiquement équivalente à une autre. De telles notions sont dites topologiques. Elles ne dépendent que de la définition de l'ensemble des ouverts.*

Exercices : Résoudre les Exercices 1.9 et 1.10.

1.5 Topologie induite

Définition 1.5.1 (Espace métrique induit) *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $F \subset E$ *une partie de* E*. On appelle* espace métrique induit*, l'espace métrique* (F, d) *obtenu en restreignant la fonction distance à* F*.*

Remarque 1.5.2 *Soit* $x \in F$*, la boule ouverte de* F *centrée en* x *et de rayon* $r > 0$ *est, par définition*

$$B_F(x, r) = \{y \in F : d(x, y) < r\}.$$

Comme alors

$$B_F(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\} \cap F = B_E(x, r) \cap F$$

les boules ouvertes de F *sont exactement les* traces *sur* F *des boules ouvertes de* E*. Il s'ensuit que les ouverts de* F *sont les traces sur* F *des ouverts de* E*, i.e. les ouverts de* F *sont de la forme* $O \cap F$ *où* O *est un ouvert de* E*. On notera qu'en général un ouvert de* F *n'est pas un ouvert de* E *(à moins que* F *ne soit un ouvert de* E*). On peut montrer que les mêmes propriétés sont vérifiées pour les fermés de* F*.*

Exemple 1.5.3 *Soit* $E = \mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle* $d(x, y) = |x - y|$ *et* $F = [0, 1[$*. L'intervalle* $[0, \frac{1}{2}[$ *est un ouvert de* F *car* $[0, \frac{1}{2}[=] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap F$*. Remarquons que* $[0, \frac{1}{2}[$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$*.*

Exercices : Résoudre l'Exercice 1.11.

1.6 Topologie produit

Soient $(E, d_1), \ldots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques. Soit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$. Sur $E \times E$ on définit

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i)$$

et

$$d_p(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i)^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty[$$

où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ avec $x_i, y_i \in E_i$.

Proposition 1.6.1 *(i) d_p pour $p \in [1, +\infty[$ et d_∞ sont des distances sur E.*

(ii) Ces distances sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. Puisque pour tout $i = 1, \ldots, k$

$$(x, y) \in E \times E \to d_i(x_i, y_i)$$

est une semi-distance sur E, on sait déjà (voir l'Exemple 1.2 (ii)) que d_1 et d_∞ sont des distances. Concernant d_p on procède par calcul direct. Le seul point délicat est l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_p(x, z) &= \left[\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, z_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{k} [d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)]^p \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski (voir l'Exercise 1.12) il vient que

$$\begin{aligned} d_p(x, z) &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{k} d_i(y_i, z_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(x, y) + d_p(y, z). \end{aligned}$$

Il nous reste à prouver que ces distances définissent la même topologie. Cela résulte de la Proposition 1.1.14 et de l'observation que

$$d_\infty(x, y) \leqslant d_p(x, y) \leqslant k^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y), \quad \forall p \in [1, +\infty[, \quad \forall x, y \in E.$$

En effet on a, puisque $d_i(x_i, y_i) \leqslant d_\infty(x, y)$ pour tout $i = 1, \ldots, k$

$$d_p(x, y) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} d_\infty(x, y)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left[k\, d_\infty^p(x, y) \right]^{\frac{1}{p}} = k^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y).$$

On a aussi

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i(x,y)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\max_{i=1,\dots,k} d_i(x_i,y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \Big[d_\infty(x,y)\Big]^{\frac{1}{p}} = d_\infty(x,y)$$

et l'on conclut. ■

Définition 1.6.2 (Espace métrique produit) *On appelle espace métrique produit de* $(E_1,d_1),\dots,(E_k,d_k)$*, l'espace métrique* (E,δ) *où* $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k := \prod_{i=1}^n E_i$ *et* δ *est l'une des distances* d_p *pour* $p \in [1,\infty]$ *introduites précédemment.*

Remarque 1.6.3 *Par la Proposition 1.6.1 tout les espaces* (E,d_p) *pour* $p \in [1,\infty]$ *ont la même famille d'ouverts.*

Proposition 1.6.4 (Convergence dans l'espace produit) *Soient* (E_i,d_i)*,* $i = 1,\dots,k$ *des espaces métriques et* $(x^m) \subset E = \prod_{i=1}^k E_i$*. Alors*

$$x^m \to x \text{ dans } E \text{ (pour la topologie produit)}$$

si et seulement si

$$x_i^m \to x_i \text{ dans } E_i, \quad \forall i = 1,\dots,k.$$

Démonstration. Puisque la convergence dans E ne dépend pas du choix particulier de la distance d_p, $p \in [1,+\infty]$ on fait le choix particulier (E,d_1). Puisque alors

$$d_1(x^m,x) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i^m,x_i)$$

on a le résultat cherché. ■

Exercices : Résoudre l'Exercice 1.12.

Chapitre 2

Les espaces vectoriels normés

Avant de continuer l'étude des espaces métriques généraux nous allons présenter une classe d'espaces métriques très importante : les *espaces vectoriels normés.*

2.1 Notion d'espace vectoriel normé

Définition 2.1.1 (Norme) *Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $N : E \to [0, +\infty[$ vérifiant*

i) $N(x) = 0 \iff x = 0.$

ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \quad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E.$

iii) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y), \quad \forall x, y \in E$ *(inégalité de convexité).*

Définition 2.1.2 (Espace vectoriel normé) *Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé. La norme est habituellement notée $|| \cdot ||$.*

On établi facilement le résultat suivant (à vérifier) :

Proposition 2.1.3 (Distance associée à une norme) *Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $(x, y) \in E \times E \to ||x - y||$ est une distance.*

Exemple 2.1.4 *(i) Sur $E = \mathbb{R}^N$ les applications*

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad ||x||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$$

sont des normes (à vérifier).

(ii) Pour $p \in [1, +\infty[$ on note $l^p(\mathbb{N})$ le sous-ensemble des suites $x = (x_n)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Alors $l^p(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel et

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme. En effet soient $x, y \in l^p(\mathbb{N})$ on a, par l'inégalité de Minkowski dans $\mathbb{R}^N$ (voir Exercice 1.12), $\forall M \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{M} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{M} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{M} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant ||x||_p + ||u||_p.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\left(\sum_{n=1}^{M} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, i.e. $x + y \in l^p(\mathbb{N})$. Aussi

$$||x + y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p.$$

Le reste est clair.

(iii) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On vérifie facilement que les deux applications suivantes sont des normes

$$||f||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad et \quad ||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Montrons qu'elle ne sont pas topologiquement équivalentes. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe $(f_n) \subset E$ telle que

$$||f_n||_\infty = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad et \quad ||f_n||_1 \to 0.$$

Considérons

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n(x - a) & si \quad a \leqslant x \leqslant a + \frac{1}{n} \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On a clairement que $f_n \in E$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand et qu'alors $||f_n||_\infty = 1$. Après calcul il vient aussi que

$$||f_n||_1 = \int_a^{a+\frac{1}{n}} [1 - n(x - a)]dx = \frac{1}{2n} \to 0.$$

2.2 Espace préhilbertien

Définition 2.2.1 (Produit scalaire) *On appelle* produit scalaire *sur E une application $u : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique et définie positive.*

Rappel 2.2.2 *Par positive on entend que $u(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et par définie que $u(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Définition 2.2.3 (Espace préhilbertien) *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit* préhilbertien . *Un espace préhilbertien de dimension finie est appelé un espace euclidien.*

Exemple 2.2.4 *(i) Sur $E = \mathbb{R}^N$, l'application $u(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ est un produit scalaire.*
(ii) Sur $E = C([a, b], \mathbb{R})$, $u(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire.

Proposition 2.2.5 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) *Soit E un espace vectoriel et $u : E \times E \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Alors*

$$|u(x, y)| \leqslant \sqrt{u(x, x)}\sqrt{u(y, y)}, \quad \forall x, y \in E.$$

Démonstration. On sait que

$$u(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la bilinéarité et la symmétrie il vient alors que

$$0 \leqslant u(x + \lambda y, x + \lambda y) = u(x, x) + 2\lambda u(x, y) + \lambda^2 u(y, y).$$

Le discriminant de ce polynôme en λ doit être négatif ou nul, c'est à dire on doit avoir

$$4u^2(x, y) - 4u(y, y)u(x, x) \leqslant 0.$$

D'où le résultat. ∎

A partir de maintenant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera un produit scalaire.

Proposition 2.2.6 (Norme associée à un produit scalaire) *Soit E un espace préhilbertien. Alors $x \to ||x||$ définie par $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E.*

Démonstration. On a, en utilisant Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2 \\ &\leqslant ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

D'où $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$. Le reste est clair. ∎

Proposition 2.2.7 *Soit E un espace préhilbertien. On a les identités suivantes :*

(i)

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\Big[||x||^2 + ||y||^2\Big] \quad \textit{(identité du parallélogramme).}$$

(ii)

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big[||x + y||^2 - ||x - y||^2\Big] \quad \textit{(identité de polarisation).}$$

Démonstration. On écrit

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \quad \text{et} \quad ||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

et on fait la somme et la différence respectivement. ∎

Définition 2.2.8 (Vecteurs orthogonaux) *Soit E un espace préhilbertien. On dit que deux éléments x et y de E sont* orthogonaux *si $\langle x, y\rangle = 0$. On écrit alors $x \perp y$.*

Théorème 2.2.9 (Théorème de Pythagore) *Soit E un espace préhilbertien. Alors*

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Démonstration. On écrit

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = ||x||^2 + ||y||^2.$$

∎

Définition 2.2.10 (Orthogonal) *Soit E un espace préhilbertien et $F \subset E$. On appelle* orthogonal *de F et l'on note $F^\perp$ l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à tout élément de F, c'est à dire*

$$F^\perp = \{y \in E \text{ tel que } \langle y, x\rangle = 0, \forall x \in F\}.$$

Remarque 2.2.11 *On peut montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E (voir Exercice 2.5).*

Exercices : Résoudre les Exercices 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5.

Chapitre 3

Applications continues entre espaces métriques

3.1 Définitions-propriétés

Définition 3.1.1 (Application continue) *Soient* (E_1, d_1) *et* (E_2, d_2) *deux espaces métriques et* $f : E_1 \to E_2$ *une application. On dira que* f *est* continue *au point* $a \in E_1$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } d_1(x, a) \leqslant \alpha \Longrightarrow d_2(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 3.1.2 *Dire que* f *est continue en* $a \in E_1$ *revient à dire que* $\forall \varepsilon > 0$, $f^{-1}(B_{E_2}(f(a), \varepsilon))$ *contient une boule centrée en* $a \in E_1$.

Définition 3.1.3 (Continuité sur un ensemble) *On dira que* $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ *est continue sur* (E_1, d_1) *si elle est continue en tout point* $a \in E_1$.

A partir de maintenant, et lorsqu'il n'y a pas de risque de confusions, si (E, d) est un espace métrique on dira que on dira que $O \subset E$ est un ouvert s'il est ouvert au sens de la distance d.

Théorème 3.1.4 (La Continuité est définie par la topologie) *L'application* $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ *est continue sur* (E_1, d_1) *si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de* (E_2, d_2) *est un ouvert de* (E_1, d_1).

Démonstration. Supposons que f soit continue sur (E_1, d_1) et soit $A_2 \subset E_2$ un ouvert On pose $A_1 = f^{-1}(A_2) = \{x \in E_1 : f(x) \in A_2\}$. Soit $a \in A_1$ un point arbitraire. On note que $f(a) \in A_2$. Comme A_2 est ouvert il existe une boule $B_{E_2}(f(a), \alpha_2) \subset A_2$ et

$$f^{-1}(B_{E_2}(f(a), \alpha_2)) \subset f^{-1}(A_2) = A_1.$$

Or, d'après la Remarque 3.1.2, f étant continue en a, $f^{-1}(B_{E_2}(f(a), \alpha_2))$ contient une boule $B_{E_1}(A, \alpha_1)$ et l'on a donc $B_{E_1}(A, \alpha_1) \subset A_1$. Par suite A_1 est ouvert.

Réciproquement, supposons que $f^{-1}(A_2)$ est un ouvert pour tout ouvert $A_2 \subset E_2$. Soit $a \in E_1$ et $\varepsilon > 0$ arbitraire. Alors $f^{-1}(B_2(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert contenant $a \in E_1$. Par définition il contient une boule centrée en $a \in E_1$ et d'après la Remarque 3.1.2, f est continue en a. ∎

Remarque 3.1.5 (Définition de la continuité par les fermés) *En utilisant la propriété que $f^{-1}(C_{E_2}A) = C_{E_1}f^{-1}(A)$ on peut montrer que le Théorème 3.1.4 est vrai en remplaçant ouvert par fermé.*

Exemple 3.1.6 *Si $f : (E, d) \to \mathbb{R}$ est continue ($\mathbb{R}$ étant muni de la distance usuelle), pour $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} \quad \textit{est un ouvert de } E.$$
$$\{x \in E : f(x) \leqslant \alpha\} \quad \textit{est un fermé de } E.$$

Proposition 3.1.7 (Composition de fonctions continues) *Si $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ est continue en $a \in E_1$ et si $g : (E_2, d_2) \to (E_3, d_3)$ est continue en $f(a) \in E_2$ alors $g \circ f : (E_1, d_1) \to (E_3, d_3)$ est continue en $a \in E$.*

Démonstration. Soit $h = g \circ f$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$h^{-1}(B_{E_3}(h(a), \varepsilon)) = f^{-1}(g^{-1}(B_{E_3}(h(a), \varepsilon))).$$

Puisque $h(a) = g(f(a))$ et que g est continue en $f(a)$, $\exists \alpha > 0$ tel que

$$B_{E_2}(f(a), \alpha) \subset g^{-1}(B_{E_3}((h(a), \varepsilon)))$$

et donc

$$f^{-1}(B_{E_2}(f(a), \alpha)) \subset f^{-1}(g^{-1}(B_{E_3}((h(a), \varepsilon))).$$

Maintenant f étant continue en $a \in E_1$, $\exists \beta > 0$ tel que

$$B_1(a, \beta) \subset f^{-1}(B_{E_2}(f(a), \alpha)).$$

On en conclut que h est bien continue en $a \in E_1$. ∎

Une autre manière, équivalente, de définir une application continue est :

Théorème 3.1.8 (Continuité par les suites) *Soit $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ et $a \in E_1$. Alors f est continue en $a \in E_1$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset E_1$ telle que $x_n \to a$ on a $f(x_n) \to f(a)$.*

Démonstration. Supposons que f soit continue en $a \in E_1$ et soit $(x_n) \subset E_1$ telle que $x_n \to a$. Puisque f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in B_{E_1}(a, \alpha) \Longrightarrow f(x) \in B_{E_2}(f(a), \varepsilon)$. Aussi, puisque $x_n \to a$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n \in B_{E_1}(a, \alpha), \forall n \geqslant n_0$$

d'où $f(x_n) \subset B_2(f(a), \varepsilon)$, $\forall n \geqslant n_0$ et donc on a bien que $f(x_n) \to f(a)$.

Réciproquement, supposons que $\forall (x_n) \subset E$ telle que $x_n \to a$ on a $f(x_n) \to f(a)$. Si f n'était pas continue en $a \in E$ il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0,\ \exists x_\alpha \in B_{E_1}(a, \alpha) \text{ satisfaisant } f(x_\alpha) \notin B_{E_2}(f(a), \varepsilon).$$

On voit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, il est possible de choisir un $x_n \in B_{E_2}(a, \frac{1}{n})$ tel que

$$f(x_n) \notin B_{E_2}(f(a), \varepsilon).$$

Cela donne une contradiction avec l'hypothèse. ■

Théorème 3.1.9 (Continuité d'une fonction à valeur dans un espace produit) *Soit (E, d) un espace métrique et $F = \prod_{i=1}^k F_i$ l'espace produit obtenu à partir d'espaces métriques (F_i, δ_i). Soit*

$$f : (E, d) \to (F, \delta)$$

où $\delta : F \times F \to \mathbb{R}$ est une des distances d_p, $p \in [1, +\infty]$ dont on a muni l'espace produit (voir la Proposition 1.6.1 et la Définition 1.6.2). Soient $f_1, \cdots, f_k$ les composantes de f. Alors f est continue si et seulement si ses composantes $f_i : (E, d) \to (F_i, \delta_i)$ sont continues.

Démonstration. Soit $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \to a \in E$. Par définition

$$f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \cdots, f_n(x_n)).$$

Par la Proposition 1.6.4 on a

$$f(x_n) \to f(a) \text{ si et seulement si } f_i(x_n) \to f_i(a),\ \forall i = 1, \cdots, k.$$

On conclut alors par le Théorème 3.1.8. ■

Trivialement on a aussi :

Théorème 3.1.10 (Continuité d'une fonction définie sur un espace produit) *Soit $(E, d) = \prod_{i=1}^k E_i$ un produit d'espace métriques et (F, δ) un espace métrique. Si $f : x = (x_1, \cdots, x_k) \in E \to F$ est continue en $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ alors, pour chaque $i = 1, \cdots, k$ l'application partielle*

$$x_i \in E_i \to f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_k) \in F$$

est continue au point $a_i \in E_i$.

Remarquons que la réciproque est fausse :

Remarque 3.1.11 *La continuité des applications partielles d'une application f, définie sur un produit d'espaces métriques n'implique pas la continuité de f. Pour voir cela considérons dans $\mathbb{R}^2$*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On a $f(x,0) = 0$ et donc $x \to f(x,0)$ est continue en 0. De même $y \to f(0,y)$ est continue en 0. Par contre $(x,y) \to f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \not\to 0$ quand $(x,x) \to (0,0)$.

Définition 3.1.12 (Densité) *Soit (E,d) un espace métrique et $F \subset E$ un sous-ensemble. On dira que $F \subset E$ est* dense *dans E si $\overline{F} = E$.*

Remarque 3.1.13 (Definitions équivalentes de la densité) *F est dense dans E si et seulement si tout ouvert de E rencontre F. En particulier donc F est dense dans E si et seulement si $\forall x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. C'est aussi équivalent à : $\forall x \in E$, $\exists (x_n) \subset F$ tel que $x_n \to x$.*

Exemple 3.1.14 *(i) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance standard.*

(ii) Les suites (x_n) nulles à partir d'un certain indice (dépendant à priori de la suite) sont denses dans $l^p(\mathbb{N})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ mais pas dans $l^\infty(\mathbb{N})$ ($l^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites bornées muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Voir pour cela l'Exercice 3.3.

Proposition 3.1.15 *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $A \subset E$ dense dans E. Soient f,g deux applications de (E,d) dans (F,δ) continues et telles que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in F$. Alors $f = g$.*

Démonstration. Soit $x \in E$, $\exists (x_n) \subset F$ tel que $x_n \to x$. Puisque $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ il vient en passant à la limite (et par unicité de la limite) que $f(x) = g(x)$. ■

Exercices : Résoudre les Exercices 3.1, 3.2 et 3.3.

3.2 Application continue et métriques topologiquement équivalentes

On rappelle que deux distances d_1, d_2 définies sur un ensemble E sont dites topologiquement équivalentes si elles définissent les mêmes ouverts. Nous avons vu que les notions d'intérieur, d'adhérence, de frontière et de convergence des suites sont invariantes par passage d'une métrique topologiquement équivalentes à une autre ; on dit que ce sont des notions topologiques. Nous allons maintenant explorer les liens entre les applications continues et les métriques topologiquement équivalentes.

Proposition 3.2.1 *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$ une fonction continue. Soient d_1 une distance sur E topologiquement équivalente à d et δ_1 une distance sur F topologiquement équivalente à δ. Alors f est continue de (E,d_1) dans (F,δ_1).*

Démonstration. Soit O un ouvert dans (F,δ_1). Alors O est ouvert dans (F,δ) car δ et δ_1 sont topologiquement équivalentes. Mais $f : (E,d) \to (F,\delta)$ est continue et donc $f^{-1}(O)$ est ouvert dans (E,d). Puisque d et d_1 sont topologiquement équivalentes il vient que $f^{-1}(O)$ est ouvert dans (E,d_1). Donc on a bien que pour tout ouvert O de (F,δ_1), $f^{-1}(O)$ est ouvert dans (E,d_1), i.e. que $f : (E,d_1) \to (F,\delta_1)$ est continue. ■

Définition 3.2.2 (Homéomorphisme) *Une application $f : (E, d) \to (F, \delta)$ bijective, continue ainsi que son inverse (on dit bicontinue) est appellée un* homéomorphisme *. Lorsqu'il existe un homéomorphisme entre deux espaces métriques on dit qu'ils sont* homéomorphes.

Exemple 3.2.3 *L'application $f : x \in \mathbb{R} \to \dfrac{x}{1+|x|} \in]-1, 1[$ est une bijection bicontinue (ici $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$). Par suite $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est homéomorphe à $]-1, 1[$.*

On prouve facilement (à vérifier cependant en détail) le résultat suivant :

Proposition 3.2.4 (Homéomorphismes et métriques topologiquement équivalentes) *Soit E un ensemble sur lequel sont définies deux distances d_1 et d_2. Celles-ci sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité*

$$i : x \in (E, d_1) \to x \in (E, d_2)$$

est un homéomorphisme.

Exercices : Résoudre les Exercices 3.4 et 3.5.

3.3 Distances uniformément équivalentes

Définition 3.3.1 (Continuité uniforme) *Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$. On dit que f est* uniformément continue *sur E si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0 \ \text{ tel que } \ d(x, y) \leqslant \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 3.3.2 (La continuité n'implique pas la continuité uniforme) *Clairement la continuité uniforme implique la continuité. L'exemple de $f : x \to x^2$ sur $\mathbb{R}$ montre que l'inverse n'est pas vrai. En effet f est continue mais si l'on considère la suite $\Big((x_n, y_n)\Big) = \Big((n, n + \frac{1}{n})\Big)$ on a que $|x_n - y_n| \to 0$ mais*

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |x_n^2 - y_n^2| = |n^2 - (n^2 + \frac{1}{n} + 2)| = |2 + \frac{1}{n}| \to 2 > 0$$

et donc f n'est pas uniformément continue.

Exemple 3.3.3 (Application hölderienne, lipchitzienne) *Une application $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est dite* Hölderienne *d'exposant $0 < \alpha \leqslant 1$) s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant C[d(x, y)]^\alpha.$$

Pour $\alpha = 1$, f est dite lipchitzienne. *. Ce sont des applications uniformément continues. Un cas important est fourni par $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable à dérivée bornée. On effet alors pour le Théorème des accroissements fini on a*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{z \in I} |f'(z)||x - y|.$$

Au contraire des notions précédentes la continuité uniforme n'est pas préservée par changement à une métrique topologiquement équivalente. Pour voir cela considérons l'application

$$i : x \in (\mathbb{R}^+, d) \to x \in (\mathbb{R}^+, d), \quad (\text{ici } d(x,y) = |x-y|).$$

Cette application est trivialement uniformément continue. Elle ne l'est plus si on remplace l'espace d'arrivée par $(\mathbb{R}^+, \delta)$ où $\delta(x,y) = |x^2 - y^2|$. En effet nous venons de voir que pour $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$ on a $|x_n - y_n| \to 0$ alors que $\delta(x_n, y_n) = |x_n^2 - y_n^2|$ ne tend pas vers zéro. Pourtant d et δ sont topologiquement équivalentes. En effet $\delta(x,y) = d(f(x), f(y))$ où $f(x) = x^2$ et on conclut par l'Exercice 3.4.

Cela nous conduit à définir une notion d'équivalence plus forte que la notion précédente :

Définition 3.3.4 (Distance uniformément équivalentes) *Soit E un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On dira que d_1 et d_2 sont* uniformément équivalentes *si l'application identité*

$$i : x \in (E, d_1) \to x \in (E, d_2)$$

est uniformément continue ainsi que son inverse. Autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } d_1(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow d_2(x,y) \leqslant \varepsilon$$

et vice-versa.

Remarque 3.3.5 *Avec cette définition on a bien que si $f : (E, d_1) \to (F, d_2)$ est uniformément continue alors la même fonction mais définie sur (E, d_3) à valeur dans (F, d_4) est aussi uniformément continue si (d_1, d_3) et (d_2, d_4) le sont. Pour voir cela il suffit essentiellement d'utiliser le fait qu'une composition de fonctions uniformément continue est continue (à vérifier).*

Définition 3.3.6 (Notion uniforme) *Une notion préservée par changement d'une distance uniformément équivalente à une autre est appelée une notion uniforme.*

Remarque 3.3.7 *Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$. On appelle* diamètre *de F le nombre* $\sup\{d(x,y) : x, y \in F\}$*. F est dit* borné *si son diamètre est fini. On notera que la bornitude d'un ensemble n'est pas une notion uniforme (et donc encore moins topologique). En effet si E n'est pas borné pour une distance d, il le devient pour la distance $\delta = \min(1, d)$ alors que les deux distances sont uniformément équivalentes (voir Exercice 1.4). Notons enfin que si deux distances d_1 et d_2 vérifient $\exists C_1, C_2 > 0$ tel que*

$$C_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant C_2 d_1(x,y)$$

alors d_1 et d_2 sont uniforméments équivalentes et ont les même bornés.

Remarque 3.3.8 *Dans le cadre des espaces vectoriels normés les notions d'équivalences topologiques et uniformes coincident. En effet soit E un espace vectoriel et $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ deux* *normes. Supposons que* $(E, ||\cdot||_1)$ *et* $(E, ||\cdot||_2)$ *ont les mêmes ouverts. Alors* $B_1(0,1) := \{x : ||x||_1 \leqslant 1\}$ *contient une boule* $B_2(0,\alpha) := \{x : ||x||_2 \leqslant \alpha\}$ *c'est à dire*

$$||x||_2 \leqslant \alpha \Longrightarrow ||x||_1 \leqslant 1.$$

Soit $x \in E$ *quelconque, alors* $y = \dfrac{\alpha x}{||x||_2}$ *vérifie* $||y||_2 = \alpha$*, donc* $||y||_1 \leqslant 1$ *c'est à dire*

$$||\frac{\alpha x}{||x||_2}|| \leqslant 1$$

ou encore

$$||x||_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}||x||_2.$$

En inversant le rôle des normes on montre aussi qu'il existe un $\beta > 0$ *tel que* $||x||_2 \leqslant \frac{1}{\beta}||x||_1$*. En conclusion on a que* $\exists C_1, C_2 > 0$ *tel que*

$$C_1||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant C_2||x||_2$$

et les deux distance associées sont donc uniformément équivalentes. Par suite on dira simplement que $||\cdot||_1$ *et* $||\cdot||_2$ *sont équivalentes si elles définissent les mêmes ouverts.*

Exercices : Résoudre les Exercices 3.6 et 3.7.

3.4 Applications linéaires continues

Soient $(E_1, ||\cdot||_1)$ et $(E_2, ||\cdot||_2)$ deux espaces vectoriels normés. On note $L(E_1, E_2)$ l'espace vectoriel des *applications linéaires* de E_1 dans E_2 et $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ *le sous-espace de* $L(E_1, E_2)$ *des applications linéaires continues.*

Théorème 3.4.1 (Continuité des applications linéaires) *Soient* $(E_1, ||\cdot||_1)$ *et* $(E_2, ||\cdot||_2)$ *deux espaces vectoriels normés et* $A \in L(E_1, E_2)$*. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est continue en* 0*.*

(ii) *A est continue partout, c'est à dire* $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$*.*

(iii) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $||Ax||_2 \leqslant C||x||_1$ *pour tout* $x \in E_1$*.*

(iv) *L'image par* A *de tout borné de* E_1 *est un borné de* E_2*.*

Démonstration. Supposons que A soit continue à l'origine. Alors comme $A(0) = 0$ (par linéarité) il existe $\alpha > 0$ tel que $||x||_1 \leqslant \alpha \Longrightarrow ||Ax||_2 \leqslant 1$.

Soit $x \in E_1$ quelconque, en posant $y = \dfrac{\alpha x}{||x||_1}$ on a $||y||_1 \leqslant \alpha$ et donc $||Ay||_2 \leqslant 1$, c'est à dire que

$$\left|\left|A\left(\frac{\alpha x}{||x||_1}\right)\right|\right|_2 \leqslant 1.$$

Par la linéarité de A il vient alors
$$\frac{\alpha}{||x||_1}||Ax||_2 \leqslant 1$$
d'où, pour $c = \alpha^{-1}$, $||Ax||_2 \leqslant c||x||_1$. Maintenant en posant $x-y$ à la place de x il vient, grâce à la linéarité de A
$$||Ax - Ay||_2 \leqslant c||x-y||_1, \quad \forall x, y \in E_1$$
ce qui montre que A est (uniformément) continue sur E_1. Puisque donc (i) $\Longrightarrow$ (iii) on en déduit l'équivalence de (i),(ii),(iii).

Pour terminer la preuve montrons que (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). On rappelle que $B \subset (E, ||\cdot||)$ est borné si $\sup_{x,y\in B} ||x-y|| < \infty$ (voir la Remarque 3.3.7). Clairement B est borné si et seulement si B est inclus dans une boule.

Si (iii) est vérifié, remarquons que $\forall \alpha > 0$,
$$||x||_1 \leqslant \alpha \Longrightarrow ||Ax||_2 \leqslant C\alpha$$
c'est à dire que
$$A(B_{E_1}(0,\alpha)) \subset B_{E_2}(0, C\alpha).$$
Par suite si $B \subset E_1$ est borné, i.e. $B \subset B_{E_1}(0,\alpha)$ pour un $\alpha > 0$ on a que $A(B) \subset B_{E_2}(0, C\alpha)$. Donc $A(B)$ est borné.

Réciproquement si A envoie tout borné dans un borné alors pour tout $\alpha > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que
$$A(\overline{B}_{E_1}(0,\alpha)) \subset \overline{B}_{E_2}(0,\beta)$$
c'est à dire
$$||x||_1 \leqslant \alpha \Longrightarrow ||Ax||_2 \leqslant \beta.$$
En particulier, $\forall x \in E_1$, en posant $y = \dfrac{\alpha x}{||x||_1} \in \overline{B}_{E_1}(0,\alpha)$ il vient que
$$\left|\left|A\left(\frac{\alpha x}{||x||_1}\right)\right|\right|_2 \leqslant \beta.$$
C'est à dire que $||Ax||_2 \leqslant \alpha^{-1}\beta||x||_1$ et donc (iii) est vérifiée. ∎

Exemple 3.4.2 *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et $A : f \in E \to f(0) \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que A est une application linéaire. Aussi si l'on munit E de la norme*
$$||f||_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$
il vient que $|f(0)| \leqslant ||f||_\infty$ et par suite A est continue. Cette application est appelée la norme de Dirac *à l'origine et on la note δ_0. Montrons maintenant que si l'on munit E de la norme*
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$
alors δ_0 n'est pas continue. Pour voir cela on considère la suite $(f_n) \subset E$ avec $f_n(x) = (1-x)^n$. Clairement
$$||f_n||_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$
alors que $\delta_0(f_n) = 1$. Il ne peut donc pas exister de $C > 0$ telle que $|\delta_0(f_n)| \leqslant C||f_n||_1$.

En revanche si l'espace de départ est de dimension finie, la continuité d'une application linéaire est indépendante de la norme choisie. En fait on a :

Proposition 3.4.3 (En dimension finie une application linéaire est continue) *Soit* $(E_1, ||\cdot||_1)$, $(E_1, ||\cdot||_2)$ *deux espaces vectoriels normés. Si* E_1 *est de dimension finie alors toute application linéaire de* E_1 *dans* E_2 *est continue.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E_1. Alors tout $x \in E_1$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, pour des λ_i, $i = 1, \cdots, n$ dans $\mathbb{R}$. On vérifie que l'application $x \in E_1 \to ||x|| := \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ est une norme sur E_1. On admettra ici (ce que l'on démontrera au Chapitre 5, Théorème 5.3.1) que toutes les normes sur E_1 sont équivalentes. On peut donc travailler avec $||\cdot||$ au lieu de $||\cdot||_1$. Alors, pour tout $A \in L(E_1, E_2)$

$$\begin{aligned} ||Ax||_2 &= ||A(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)||_2 = ||\sum_{i=1}^n \lambda_i A(e_i)||_2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i|\, ||Ae_i||_2 \leqslant \max_{i=1,\cdots,n} ||Ae_i||_2 \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = C||x|| \end{aligned}$$

où l'on a posé $C = \max_{i=1,\cdots,n} ||Ae_i||_2$. ■

Théorème 3.4.4 (Norme d'une application linéaire) *Soient* $(E_1, ||\cdot||_1)$, $(E_1, ||\cdot||_2)$ *deux espaces vectoriels normés et* $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. *On pose*

$$||A|| = \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1}.$$

Alors l'application de $\mathcal{L}(E_1, E_2) \to \mathbb{R}$ *donnée par* $A \to ||A||$ *est une norme.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'abord que $||A|| < \infty$, $\forall A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Maintenant

$$||A|| = 0 \Longleftrightarrow \frac{||Ax||_2}{||x||_1} = 0, \forall x \neq 0, x \in E_1 \Longleftrightarrow Ax = 0, \forall x \in E_1.$$

Aussi

$$||\lambda A|| = \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||(\lambda A)x||_2}{||x||_1} = |\lambda| \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1} = |\lambda|\, ||A||.$$

Finalement si $A, B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ on a

$$\begin{aligned} ||(A+B)|| &= \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||(A+B)x||_2}{||x||_1} \\ &\leqslant \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||Ax||_2 + ||Bx||_2}{||x||_1} \\ &\leqslant \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1} + \sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{||Bx||_2}{||x||_1} = ||A|| + ||B||. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.4.5 (Définitions équivalentes de la norme) *Si $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $||A||$ peut être aussi défini par*

(i) $\sup_{x\in E_1 ||x||_1=1} ||Ax||_2$.

(ii) $\sup_{x\in E_1 ||x||_1\leqslant 1} ||Ax||_2$.

(iii) $\min\{C > 0 : ||Ax||_2 \leqslant C||x||_1\}$.

Démonstration. Le fait que $||A|| = \sup\limits_{||x||_1=1} ||Ax||_2$ résulte directement de la linéarité de A. Pour montrer que $||A|| = \sup\limits_{||x||_1\leqslant 1} ||Ax||_2$ supposons, par l'absurde, qu'il existe $y \in E_1$ vérifiant $||y||_1 < 1$ tel que $||Ay||_2 > ||A||$. En posant $x = \dfrac{y}{||y||_1}$ il vient que $||x||_1 = 1$ avec

$$||Ax||_2 = \frac{1}{||y||_1}||Ay||_2 > \frac{1}{||y||_1}||A|| > ||A||$$

ce qui est une contradiction. Finalement notons que puisque, par définition de $||A||$,

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_1} \leqslant ||A||, \ \forall x \in E_1, \ x \neq 0$$

on a que $||Ax||_2 \leqslant ||A||\,||x||_1$, $\forall x \in E_1$. Aussi si $C < ||A||$, alors par définition du supremum, il existe $x \in E_1$ tel que

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_1} > C.$$

Par suite on a bien que

$$||A|| = \min\{C > 0 : ||Ax||_2 \leqslant C||x||_1\}.$$

■

Remarque 3.4.6 *Il cela clair ultérieurement que l'on peut, souvent, remplacer le supremum par le maximum dans la définition de la norme et ses caractérisations. Il faudra, pour cela, se doter de résultats de compacité du type Bolzano-Weirstrass (voir le Chapitre 5).*

Remarque 3.4.7 *Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est une application linéaire diagonalisable (c'est à dire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^N$ constituée de vecteurs propres de A) alors on peut facilement montrer que*

$$||A|| = \max_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Proposition 3.4.8 *Soient $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $B \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$. Alors $BA := B \circ A \in \mathcal{L}(E_1, E_3)$ et*

$$||BA|| \leqslant ||B||\,||A||.$$

En particulier on a donc, $\forall A \in \mathcal{L}(E, E)$ que $||A^n|| \leqslant ||A||^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La composition de deux applications linéaires est linéaire et de deux applications continues est continue (voir Proposition 3.1.7). Pour établir l'inégalité remarquons que $\forall x \in E_1$,

$$||BA(x)||_3 = ||B(Ax)||_3 \leqslant ||B||\,||Ax||_2 \leqslant ||B||\,||A||\,||x||_1.$$

Donc $||B||\,||A||$ est une constante $C > 0$ qui vérifie $||(BA)x||_3 \leqslant C||x||_1$. De la Proposition 3.4.5, (iii) on déduit alors que $||BA|| \leqslant ||B||\,||A||$. ∎

Remarque 3.4.9 *On n'a pas en général que $||BA|| = ||B||\,||A||$. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ l'application linéaire A représentée par la matrice matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas nulle alors que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $||A^2|| = 0$ et $||A|| > 0$.

Exercices : Résoudre les Exercices 3.8, 3.9 et 3.10.

3.5 Applications bilinéaires continues

Soient $(E_i, ||\cdot||_i), i = 1, 2, 3$ trois espaces vectoriels normés. On rappelle qu'une application $a : E_1 \times E_2 \to E_3$ est dite bilinéaire si

$$x_1 \in E_1 \to a(x_1, x_2) \in E_3 \quad \text{est linéaire } \forall x_2 \in E_2.$$

$$x_2 \in E_2 \to a(x_1, x_2) \in E_3 \quad \text{est linéaire } \forall x_1 \in E_1.$$

Dans la suite de la section on supposera que l'espace vectoriel $E_1 \times E_2$ est muni de la norme

$$||(x_1, x_2)||_\infty = \max(||x_1||_1, ||x_2||_2)$$

ou de toute autre norme équivalente (voir la Proposition 1.6.1 et la Définition 1.6.2).

Théorème 3.5.1 (Continuité d'une application bilinéaire) *Soient $(E_i, ||\cdot||_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ des espaces vectoriels normés et $a : E_1 \times E_2 \to E_3$ une application bilinéaire. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) a est continue en $(0, 0)$.

(ii) a est continue partout.

(iii) Il existe $C > 0$ tel que $||a(x, y)||_3 \leqslant C||x||_1||y||_2$ pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$.

Démonstration. Sans restriction on peut supposer que $E_1 \times E_2$ est muni de la norme $||(\cdot,\cdot)||_\infty$. Supposons que a soit continue en $(0,0)$. Comme $a(0,0)=0$, il existe $\alpha > 0$ tels que

$$||x||_1 \leqslant \alpha \text{ et } ||y||_2 \leqslant \alpha \Longrightarrow ||a(x,y)||_3 \leqslant 1.$$

Pour x, y quelconques non nuls il vient

$$\Big|\Big|\frac{\alpha x}{||x||_1}\Big|\Big|_1 \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \Big|\Big|\frac{\alpha y}{||y||_2}\Big|\Big|_2 \leqslant \alpha$$

et donc

$$\Big|\Big|a\left(\frac{\alpha x}{||x||_1}, \frac{\alpha y}{||y||_2}\right)\Big|\Big|_3 \leqslant 1.$$

En utilisant la bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$ il vient alors

$$||a(x,y)||_3 \leqslant (\alpha\alpha)^{-1}||x||_1||y||_2$$

et donc $(i) \Longrightarrow (iii)$. Il s'ensuit l'équivalence de (i),(ii) et (iii). Maintenant, supposons qu'il existe $C > 0$ tel que

$$||a(x,y)||_3 \leqslant C||x||_1||y||_2, \quad \forall (x,y) \in E_1 \times E_2.$$

On a, $\forall (x,y) \in E_1 \times E_2$, $\forall (\overline{x},\overline{y}) \in E_1 \times E_2$

$$a(x,y) - a(\overline{x},\overline{y}) = a(x,y) - a(x,\overline{y}) + a(x,\overline{y}) - a(\overline{x},\overline{y}) = a(x, y-\overline{y}) + a(x-\overline{x},\overline{y}).$$

D'où

$$||a(x,y) - a(\overline{x},\overline{y})||_3 \leqslant C||x||_1||y-\overline{y}||_2 + C||x-\overline{x}||_1||\overline{y}||_2.$$

Par suite a est bien continue sur $E_1 \times E_2$. ■

Définition 3.5.2 *On note $\mathcal{L}(E_1, E_2; E_3)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans E_3.*

Remarque 3.5.3 *Attention de ne pas confondre $\mathcal{L}(E_1, E_2; E_3)$ avec $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; E_3)$ l'espace des applications linéaires continues de $E_1 \times E_2$ dans E_3 !*

Dans l'esprit que ce qui a été fait pour les applications linéaires on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 3.5.4 (Norme d'une application bilinéaire) *Soient $(E_i, ||\cdot||_i)$ pour $i = 1,2,3$ des espaces vectoriels normés. L'application*

$$a \in \mathcal{L}(E_1, E_2; E_3) \to ||a|| = \sup_{x\neq 0, y\neq 0} \frac{||a(x,y)||_3}{||x||_1||y||_2}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E_1, E_2; E_3)$. On peut aussi caractériser $||a||$ par

$$\sup_{||x||_1=1, ||y||_2=1} ||a(x,y)||_3 \quad ou \quad \sup_{||x||_1\leqslant 1, ||y||_2\leqslant 1} ||a(x,y)||_3$$

ou

$$\min\{C > 0 : ||a(x,y)||_3 \leqslant C||x||_1||y||_2, \forall (x,y) \in E_1 \times E_2\}.$$

Exemple 3.5.5 *(i) On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Clairement*

$$b : (f,g) \in E \times E \to f(0)g(0) \in \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire continue. Cette forme n'est plus continue si l'on munit E de la norme $||\cdot||_1$. En effet si elle était continue l'application partielle

$$f \in E \to f(0)g(0), \quad (g \in E \text{ fixé })$$

le serait (voir la Proposition 3.1.10). Or en prenant g telle que $g(0) \neq 0$ cette application est un multiple de la masse de Dirac δ_0 dont on a vu qu'elle n'était pas continue (voir l'Exemple 3.4.2).

(ii) Soit E un espace vectoriel normé. On appelle $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ le dual topologique *de E et on le note E'. Soit $a : (f,x) \in E' \times E \to f(x) \in \mathbb{R}$. Clairement a est bilinéaire et puisque $\forall (f,x) \in E' \times E$*

$$|f(x)| \leqslant ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}||x||_E$$

on a que $|a(f,x)| \leqslant ||f||_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}||x||_E$. Par suite a est continue sur $E' \times E$. On appelle cette application l'application de dualité *et on la note*

$$(f,x) \in E' \times E \to \langle f,x \rangle_{E',E}.$$

Le crochet $\langle \cdot,\cdot \rangle$ s'appelle le crochet de dualité.

Remarque 3.5.6 *Plus généralement si $(E_i, ||\cdot||_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ sont des espaces vectoriels normés on définit les applications multilinéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans E_{n+1} comme des applications linéaires par rapport à chaque variable $x_i \in E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On montre alors que les applications multilinéaires continues satisfont les versions correspondantes des Théorèmes 3.5.1 et 3.5.4.*

Exercices : Résoudre l'Exercice 3.11.

Chapitre 4

Espaces métriques complets

4.1 Généralités-Exemples

Définition 4.1.1 (Suite de Cauchy) *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset E$ est dite* de Cauchy *si $d(x_n, x_m) \to 0$ lorsque $n, n \to \infty$. Autrement dit si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon,\ \forall n, m \geqslant n_0.$$

Remarque 4.1.2 *La notion de suite de Cauchy est une notion uniforme (voir la Définition 3.3.6).*

Proposition 4.1.3 (Premières propriétés des suites de Cauchy) *Soit (E, d) un espace métrique.*

(i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

(ii) Soit $(x_n) \subset E$ une suite de Cauchy admettant une suite extraite convergente. Alors la suite $(x_n) \subset E$ est convergente.

(iii) Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration.

(i) Si $x_n \to x$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leqslant \varepsilon, \forall n, m \geqslant n_0$ et donc

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) \leqslant 2\varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0.$$

(ii) Soit $(x_n) \subset E$ une suite de Cauchy et $(x_{\phi(n)})$ une suite extraite telle que $x_{\phi(n)} \to x$ pour un $x \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon,\ \forall n, m \geqslant n_0.$$

Aussi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(p) \geqslant n_0$. Par suite $d(x_{\phi(p)}, x) \leqslant \varepsilon$ et

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{\phi(p)}) + d(x_{\phi(p)}, x) \leqslant \varepsilon + \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0.$$

(iii) Soit $(x_n) \subset E$ une suite de Cauchy. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{n_0}, x_n) \leqslant 1$, $\forall n \geqslant n_0$. Donc

$$(x_n) = \{x_0, \cdots, x_{n_0-1}\} \cup (x_n)_{n \geqslant n_0}$$

est bornée.

■

Définition 4.1.4 (Espace métrique complet) *Un espace métrique (E, d) est dit* complet *si toute suite de Cauchy de (E, d) est convergente dans (E, d)*

Exemple 4.1.5 *(i) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet mais $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.*

(ii) Considérons $E =]0, 1]$ muni de la distance usuelle $|\cdot|$ et $(x_n) = (\frac{1}{n}) \subset E$. Puisque $x_n \to 0$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, (x_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et donc de Cauchy dans $(E, |\cdot|)$. Pourtant elle ne converge pas dans $(E, |\cdot|)$.

Proposition 4.1.6 (Fermeture et sous ensembles complets) *Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $F \subset E$. Alors (F, d) est complet si et seulement si F est un fermé de E.*

Démonstration. Supposons que F soit fermé dans E. Soit $(x_n) \subset F$ une suite de Cauchy. C'est aussi une suite de Cauchy de E et donc elle converge dans E car E est complet. Maintenant puisque $(x_n) \subset F$ et que F est fermé la limite est dans F et donc F est complet. Réciproquement supposons F complet. Soit $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$ dans E. La suite (x_n) est de Cauchy dans E et donc aussi dans F. Or, par hypothèse, les suites de Cauchy de F sont convergentes dans F et donc $x \in F$. Cela prouve que F est fermé. ■

Remarque 4.1.7 *Nous avons vu que $]0, 1]$ et $\mathbb{Q}$ (les deux muni de la distance usuelle) ne sont pas complets. C'est "normal" car il ne sont pas des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Le résultat suivant montre qu'une partie de la Proposition 4.1.6 reste vraie même si E n'est pas complet. Il résulte de la partie réciproque de la preuve de la Proposition 4.1.6.

Proposition 4.1.8 *Soit (E, d) un espace métrique et soit $F \subset E$. Si (F, d) est un espace métrique complet alors F est un fermé de E.*

Définition 4.1.9 (Espace de Banach) *Un espace vectoriel normé et complet (pour la distance induite par la norme) est appelé un* espace de Banach *.*

Définition 4.1.10 (Espace de Hilbert) *Un espace préhilbertien et complet (pour la distance engendré par le produit scalaire) est appelé un* espace de Hilbert.

Remarque 4.1.11 *Tout espace de Hilbert est un espace de Banach.*

Exemple 4.1.12 (Deux exemples importants) **1)** *Soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $||\cdot||_\infty$. *Montrons que* E *c'est un espace métrique complet. Soit* $(f_n) \subset E$ *une suite de Cauchy. Par définition*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \ \textit{tel que} \ \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon,\ \forall n, m \geqslant n_0. \tag{4.1.1}$$

En particulier pour tout $x \in [0,1]$ *fixé la suite* $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ *est de Cauchy et donc elle est convergente car* $\mathbb{R}$ *est complet. Notons* $f(x)$ *cette limite. Maintenant en passant à la limite* $m \to \infty$ *dans (4.1.1) il vient*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \ \textit{tel que}\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \geqslant n_0$$

et donc $f_n \to f$ *uniformément sur* $[0,1]$. *Pour conclure il reste à montrer que* f *est continue sur* $[0,1]$. *Pour cela remarquons que* $\forall x, \forall \bar{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\bar{x})| + |f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|.$$

Puisque $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0$$

il vient que

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leqslant 2\varepsilon + |f_n(x) - f(\bar{x})|,\ \forall n \geqslant n_0.$$

Maintenant en fixant un $n \geqslant n_0$ *arbitraire on a, puisque* f_n *est continue, pour* x *proche de* $\bar{x}$

$$|f_n(x) - f(\bar{x})| \leqslant \varepsilon$$

et donc $|f(x) - f(\bar{x})| \leqslant 3\varepsilon$ *pour* x *proche de* $\bar{x}$. *En conclusion* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ *et* E *est bien complet.*

2) *Soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme*

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Montrons que ce n'est pas un espace métrique complet. Pour cela considérons la suite $(f_n) \subset E$ *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nx + (1 - \frac{n}{2}) \ \textit{si}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 \ \textit{si}\ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Supposons qu'il existe $f \in E$ *telle que*

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0.$$

Alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \quad \textit{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0.$$

Maintenant, d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|dx \to 0.$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0,$$

et finalement $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ *puisque* f *est continue. D'autre part, sur* $[\frac{1}{2}, 1]$, $f_n(x) = 1$ *et donc comme*

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \ \text{ on a que } \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(x)|dx = 0.$$

D'où $f(x) = 1$, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$. *On obtient une contradiction car* f *possède alors deux valeurs distinctes en* $\frac{1}{2}$. *Par suite* f_n *n'a pas de limite. Donc* E *n'est pas complet.*

Remarque 4.1.13 *Plus généralement on peut montrer que* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme*

$$||f||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pour } 1 < p < \infty$$

n'est pas complet.

Remarque 4.1.14 *La complétude d'un espace métrique n'est pas une notion topologique. Puisque* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est un espace métrique complet il nous suffit, pour voir cela, de construire une distance* d *sur* $\mathbb{R}$, *topologiquement équivalente à* $|\cdot|$ *telle que* $(\mathbb{R}, d)$ *ne soit pas un espace complet. Dans ce but on muni* $\mathbb{R}$ *de la distance* $d(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ *où*

$$\phi : \mathbb{R} \to]-1, 1[\quad \text{avec} \quad x \to \frac{x}{1 + |x|}.$$

Soit $(x_n) = (n)$. *Cette suite est de Cauchy dans* $(\mathbb{R}, d)$ *car*

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m}\right| \to 0.$$

Pourtant elle n'a pas de limite dans $(\mathbb{R}, d)$ *ce qui prouve que* $(\mathbb{R}, d)$ *n'est pas complet. Maintenant puisque* $\phi : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (]-1, +1[, |\cdot|)$ *est bicontinue (ce qui en fait un homéomorphisme) on sait, par l'Exercice 3.4 que sur* $\mathbb{R}$, *les distances* $|\cdot|$ *et* $d(\cdot,\cdot) = |\phi(\cdot) - \phi(\cdot)|$ *sont des distances topologiquement équivalentes.*

Remarque 4.1.15 *Soient* (E_i, d_i), $i = 1, \cdots, n$ *des espaces métriques complets. On vérifie facilement que, muni de l'une ou l'autre des distances introduites, l'espace produit* $E = \prod_{i=1}^n$ *est complet. En particulier il vient que* $\mathbb{R}^N$ *est complet.*

Exercices : Résoudre les Exercices 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5.

4.2 Applications et espaces complets

Théorème 4.2.1 (Le dual est toujours complet) *Soient* $(E, ||\cdot||_2)$ *et* $(F, ||\cdot||_F)$ *deux espaces vectoriels normés avec* $(F, ||\cdot||_F)$ *complet. Alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *est complet. En particulier le dual* $E' := \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ *est toujours complet.*

Démonstration. Soit $(L_n) \subset \mathcal{L}(E,F)$ une suite de Cauchy, c'est à dire telle que $||L_n - L_m||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$ si $n, m \to \infty$. Pour tout $x \in E$ fixé on a

$$||L_n(x) - L_m(x)||_F \leqslant ||L_n - L_m||_{\mathcal{L}(E,F)}||x||_E \tag{4.2.1}$$

et donc $(L_n(x)) \subset F$ est une suite de Cauchy qui donc converge. On note $L(x)$ sa limite. Maintenant puisque $L_n(\lambda x + \beta y) = \lambda L_n(x) + \beta L_n(y)$, $\forall x, y \in E$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, en passant à la limite on a immédiatement que $L(\lambda x + \beta y) = \lambda L(x) + \beta L(y)$ et par suite L est linéaire. Finalement il existe $C > 0$ tel que

$$||L_n(x)||_F \leqslant ||L_n||_{\mathcal{L}(E,F)}\, ||x||_E \leqslant C||x||_E,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

puisque toute suite de Cauchy est bornée. En passant à la limite on obtient donc que, $\forall x \in E$, $||L(x)||_F \leqslant C||x||_E$ c'est à dire que $L \in \mathcal{L}(E,F)$. Finalement de (4.2.1) il vient que

$$\sup_{x\in E, ||x||_E \leqslant 1} ||L_n(x) - L_m(x)||_F \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n, m \to \infty$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } ||L_n(x) - L_m(x)||_F \leqslant \varepsilon,\ \forall ||x|| \leqslant 1, \forall n, m \geqslant n_0.$$

D'où, en passant à la limite, $m \to \infty$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } ||L_n(x) - L(x)||_F \leqslant \varepsilon,\ \forall ||x|| \leqslant 1, \forall n \geqslant n_0.$$

On obtient donc que $||L_n(x) - L(x)|| \to 0$, quand $n \to \infty$, uniformément en $||x|| \leqslant 1$. Donc, par définition, $L_n \to L$ et $\mathcal{L}(E,F)$ est bien complet. ∎

De manière analogue on peut établir le résultat suivant :

Proposition 4.2.2 *Soient* $(E, ||\cdot||_E), (F, ||\cdot||_F), (G, ||\cdot||_G)$ *trois espaces vectoriels normés avec* $(G, ||\cdot||_G)$ *complet Alors* $\mathcal{L}(E,F;G)$ *est complet.*

Théorème 4.2.3 (Prolongement d'un application définie sur un ensemble dense) *Soient* (E_1, d_1) *et* (E_2, d_2) *deux espaces métriques. On suppose que* (E_2, d_2) *est complet. Soit* $A \subset E_1$ *un ensemble dense dans* E_1 *et* $f : A \to E_2$ *une fonction uniformément continue. Alors* f *se prolonge de manière unique en une application continue sur* E_1*. De plus ce prolongement est uniformément continu.*

Démonstration. **1)** Montrons tout d'abord l'unicité. Supposons que $\tilde{f}$ et g sont deux prolongements continus de f à E_1. Comme $A \subset E$ est dense, il existe $(x_n) \subset A$ tel que $x_n \to x$. Alors $\tilde{f}(x_n) = f(x_n) = g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. D'autre part, par continuité, $\tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x)$ et $g(x_n) \to g(x)$. Comme $\tilde{f}(x_n) = g(x_n)$, par l'unicité de la limite, on en déduit que $\tilde{f}(x) = g(x)$.

2) Montrons l'existence. Si $x \in E_1$ comme A est dense dans E_1, il existe $(x_n) \subset A$ tel que $x_n \to x$. On va montrer :

(i) Pour toute suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$, la suite $(f(x_n))$ converge dans (E_2, d_2).

(ii) Si $(x_n) \subset A$ et $(y_n) \subset A$ sont deux suites telles que $x_n \to x$ et $y_n \to x$, alors $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$. Cette propriété montre que la limite trouvée en (i) ne dépend pas du choix de la suite (x_n) mais seulement de $x \in E_1$. Ceci permet de définir une fonction $\tilde{f}(x) = \lim f(x_n)$ où $(x_n) \subset A$ est une suite quelconque qui converge vers $x \in E_1$.

(iii) La fonction $\tilde{f}$ est uniformément continue.

(i) Comme (E_2, d_2) est complet, il suffit de montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme f est uniformément continue sur A, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in A$ avec $d_1(x, y) \leqslant \delta$ on a $d_2(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. On sait que $x_n \to x$ dans (A, d_1), donc (x_n) est de Cauchy dans (A, d_1). Donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, p \geqslant n_0 \text{ on a } d_1(x_m, x_p) \leqslant \alpha$$

et il vient que

$$\forall m, p \geqslant n_0 \text{ on a } d_2(f(x_m), f(x_p)) \leqslant \varepsilon.$$

Cela montre que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (E_2, d_2) qui est complet, donc elle converge.

(ii) Montrons l'indépendance de la limite par rapport au choix de la suite $(x_n) \subset A$. Par l'absurde supposons qu'il existe $x \in E$ et deux suites $(x_n), (y_n) \subset A$ telles que $x_n \to x$, $y_n \to x$ dans (E_1, d_1) avec $f(x_n) \to l_1$ dans (E_2, d_2) et $f(y_n) \to l_2$ dans (E_1, d_2) et $l_1 \neq l_2$. On considère alors la suite $(z_n) \subset A$ définie par $z_{2n-1} = x_n$ et $z_{2n} = y_n$ c'est à dire $x_1, y_1, x_2, \cdots, x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \cdots$. Alors $z_n \to x$ mais $(f(x_n))$ est la suite $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \cdots, f(x_n), f(y_n), \cdots$ qui ne converge pas car les termes d'ordre impairs tendent vers l_1 et les termes d'ordre pairs tendent vers l_2 et $l_1 \neq l_2$. Cela fournit une contradiction avec le Point (i) car $z_n \to x$ avec $(z_n) \subset A$.

(iii) Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme f est uniformément continue sur A il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall a, b \in A$ avec $d_1(a, b) \leqslant \delta$ on a $d_2(f(a), f(b)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Soient $x, y \in E_1$ avec $d_1(x, y) \leqslant \frac{\delta}{3}$. Soient $(x_n) \subset A$ et $(y_n) \subset A$ deux suites telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$ dans (E_1, d_1). On peut choisir un n_0 suffisamment grand tel que, à la fois

$$d_1(x_n, x) \leqslant \frac{\delta}{3} \text{ et } d_1(y_n, y) \leqslant \frac{\delta}{3}$$

pour tout $n \geqslant n_0$ et aussi

$$d_2(f(x_n), \tilde{f}(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } d_2(f(y_n), \tilde{f}(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $n \geqslant n_0$ (par définition de $\tilde{f}$)). On a aussi, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$d_1(x_n, y_n) \leqslant d_1(x_n, x) + d_1(x, y) + d_1(y, y_n) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

D'où $d_2(f(x_n), f(y_n)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. En rassemblant ces informations il vient que

$$d_2(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leqslant d_2(\tilde{f}(x), f(x_n)) + d_2(f(x_n), f(y_n)) + d_2(f(y_n), \tilde{f}(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé $\delta > 0$ tel que

$$d_1(x, y) \leqslant \frac{\delta}{3} \Longrightarrow d_2(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\tilde{f}$ est uniformément continue. Finalement il est évident que $\tilde{f} = f$ sur $A \subset E_1$. ■

Remarque 4.2.4 *Dans le Théorème 4.2.3 le continuité uniforme est cruciale. Par exemple sur* $([0, +\infty[, |\cdot|)$ *considérons* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *donnée par* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Cette application est continue mais pas uniformément continue et on ne peut pas la prolonger en une application continue sur* $[0, +\infty[$.

Comme corollaire du Théorème 4.2.3 on a le résultat suivant :

Proposition 4.2.5 *Soient* $(E_1, ||\cdot||_1)$ *et* $(E_2, ||\cdot||_2)$ *deux espaces vectoriels normés avec* $(E_2, ||\cdot||_2)$ *complet. Soit* $A \subset E_1$ *un sous espace vectoriel dense dans* E_1 *et* $f \in \mathcal{L}(A, E_2)$. *Alors* f *s'étend de manière unique en une application linéaire continue sur* E_1 *de même norme.*

Démonstration. Nous savons déjà que f admet une extension continue unique $\tilde{f}$. Montrons que $\tilde{f}$ est linéaire. Soient $x, y \in E_1$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ quelconque, il nous faut montrer que $\tilde{f}(\lambda x + \beta y) = \lambda\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(y)$. Soient $(x_n) \subset A$ et $(y_n) \subset A$ tel que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Clairement $\lambda x_n + \beta y_n \to \lambda x + \beta y$ et donc $\tilde{f}(\lambda x_n + \beta y_n) \to \tilde{f}(\lambda x + \beta y)$. D'autre part, comme $A \subset E_1$ est un sous espace vectoriel et que f est linéaire sur A, $\tilde{f}(\lambda x_n + \beta y_n) = f(\lambda x_n + \beta y_n) = \lambda f(x_n) + \beta f(y_n) \to \lambda\tilde{f}(x) + \beta\tilde{f}(y)$. Par suite $\tilde{f}$ est bien linéaire. Maintenant soit $x \in E_1$ arbitraire et $(x_n) \subset A$ avec $x_n \to x$. On sait que

$$||\tilde{f}(x_n)||_2 \leqslant ||f||_{\mathcal{L}(A,E_2)}||x_n||_1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite en passant à la limite ($\tilde{f}$ et $||\cdot||$ sont continues) il vient que

$$||\tilde{f}(x)||_2 \leqslant ||f||_{\mathcal{L}(A,E_2)}||x||_1$$

et donc, par définition, $||\tilde{f}||_{\mathcal{L}(E_1,E_2)} \leqslant ||f||_{\mathcal{L}(A,E_2)}$. D'un autre côté on a trivialement que $||f||_{\mathcal{L}(A,E_2)} \leqslant ||\tilde{f}||_{\mathcal{L}(E_1,E_2)}$ puisque $\tilde{f}$ prolonge f. ■

4.3 Des Applications importantes de la notion de complétude

Nous allons maintenant présenter quelques applications importantes de la complétude. Commençons par deux rappels :

Rappel 4.3.1 *On dit que* $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ *est une application lipschitzienne s'il existe* $L > 0$ *tel que* $\forall x, y \in E_1$ *on a* $d_2(f(x), f(y)) \leqslant L\, d_1(x, y)$. *On appelle la plus petite constante* $L \in \mathbb{R}$ *qui vérifie cette propriété la* constante de Lipchitz.

Rappel 4.3.2 *On dit que* $f : (E, d) \to (E, d)$ *est contractante s'il existe* $k < 1$ *telle que* $\forall x, y \in E$ *on a* $d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y)$.

Théorème 4.3.3 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et soit* $f : E \to E$ *une application contractante. Alors*

(i) Il existe un unique $x \in E$ *tel que* $f(x) = x$ *(on dit alors que* $x \in E$ *est un point fixe).*

(ii) Toute suite $(x_n) \subset E$ *qui satisfait* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* $x \in E$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite définie par $x_1 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$. Alors

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leqslant k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant k^3 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\ &\leqslant \cdots k^{n-1} d(x_2, x_1). \end{aligned}$$

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ fixé et soient $p \geqslant m \geqslant N_0$. Alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_m) &\leqslant d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leqslant k^{p-2} d(x_2, x_1) + k^{p-3} d(x_2, x_1) + \cdots + k^{m-1} d(x_2, x_1) \\ &= \Big[k^{p-m-1} + k^{p-m-2} + \cdots k + 1\Big] k^{m-1} d(x_2, x_1). \end{aligned}$$

Or

$$1 + k + k^2 + \cdots k^{p-m-1} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{1}{1-k}.$$

Donc $\forall p \geqslant m \geqslant N_0$ on a, comme, $k < 1$

$$d(x_p, x_m) \leqslant k^{m-1} \frac{1}{1-k} d(x_2, x_1) \leqslant k^{N_0 - 1} \frac{1}{1-k} d(x_2, x_1).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k^{N_0 - 1} \frac{1}{1-k} d(x_2, x_1) < \varepsilon.$$

Donc $\forall p \geqslant m \geqslant N_0$ on a $d(x_p, x_m) < \varepsilon$ et donc $(x_n) \subset E$ est de Cauchy. Comme (E, d) est complet elle converge donc. Soit $x = \lim x_n$. Maintenant puisque $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geqslant 1$, en passant à la limite et en utilisant la continuité de f il vient que $x = f(x)$. Donc $x \in E$ est bien un point fixe de f.

Pour l'unicité, si $x = f(x)$ et $y = f(y)$ on écrit $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leqslant k(d(x, y))$ et comme $k < 1$ il vient que $d(x, y) = 0$ d'où $x = y$. ∎

Théorème 4.3.4 (Théorème de Cantor) *Soit* (E, d) *un espace métrique. Alors* (E, d) *est complet si et seulement si pour tout suite* (F_n) *d'ensembles fermés non-vides tels que :*

(i) $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$ *(on dit que les* (F_n) *sont emboîtés).*

(ii) $diam(F_n) \to 0$

on a que $\cap_{n\geqslant 1}F_n$ *est un singleton* $\{a\}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si (E,d) est complet alors $\cap_{n\geqslant 1}F_n$ est un singleton. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on choisit un $x_n\in F_n$. Remarquons que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ fixé et $\forall m>n$ puisque $F_m\subset F_n$ on a que $x_m\in F_n$.

Soit $\varepsilon>0$ fixé et soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $diam(F_{n_0})\leqslant\varepsilon$. Alors $\forall m,p\geqslant n_0$, on a $x_m,x_p\in F_{n_0}$ donc $d(x_m,x_p)\leqslant diam(F_{n_0})\leqslant\varepsilon$. Donc la suite $(x_n)\subset E$ est de Cauchy dans E. Mais (E,d) est complet et donc $(x_n)\subset E$ est convergente. Notons a sa limite. Maintenant, comme $x_n\in F_{n_0}$, $\forall n\geqslant n_0$, que $x_n\to a$ et que F_{n_0} est fermé, il vient $a\in F_{n_0}$. Donc $a\in F_{n_0}$ pour tout $n_0\in\mathbb{N}$ et par suite $a\in\cap_{n\geqslant 1}F_n$. Il reste à montrer que $\cap_{n\geqslant 1}F_n$ ne contient qu'un singleton. Si $a,b\in\cap_{n\geqslant 1}F_n$ on a $d(a,b)\leqslant diam F_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ et comme $diam(F_n)\to 0$ nécéssairement $d(a,b)=0$ ou encore $a=b$.

Réciproquement montrons que si l'espace possède cette propriété alors il est complet. Soit $(x_n)\subset E$ une suite de Cauchy. Considérons les ensembles, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$F_n=\overline{\{x_n,x_{n+1},\cdots\}}.$$

La suite (F_n) est constituée de fermés et elle est décroissante. Aussi comme $(x_n)\subset E$ est de Cauchy on a que $diam F_n\to 0$ si $n\to\infty$. Par hypothèse il vient donc que

$$\cap_{n=0}^{\infty}F_n$$

comporte un et un seul point, que l'on note $x\in E$. Clairement alors $x_n\to x$. ■

Lemme 4.3.5 (Lemme de Baire) *Soit* (E,d) *une espace métrique complet. Soit* (O_n) *une suite d'ouverts de* (E,d) *telle que chaque* (O_n) *est dense dans* E. *Alors*

$$\cap_{n\geqslant 1}O_n \quad \textit{est dense dans } E.$$

Démonstration. On pose $A=\cap_{n\geqslant 1}O_n$. Montrons que A a une intersection avec tout ouvert non-vide de E. Cela prouvera (voir la Remarque 3.1.13) que A est dense. Soit $\Omega\subset E$ un ouvert quelconque, $\Omega\neq\emptyset$. Puisque O_1 est dense on a $O_1\cap\Omega\neq\emptyset$ et donc, puisque $O_1\cap\Omega$ est un ouvert non vide, il existe une boule $B(x_1,r_1)\subset O_1\cap\Omega$. Maintenant comme $B(x_1,r_1)$ est ouvert et O_2 est dense on a $B(x_1,r_1)\cap O_2\neq\emptyset$. Donc il existe une boule $B(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)\cap O_2$. Quitte à diminuer $r_2>0$ si nécessaire on peut supposer que

$$r_2<\frac{r_1}{2}\ \text{ et }\ \overline{B}(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)\cap O_2.$$

Maintenant $B(x_2,r_2)\cap O_3\neq\emptyset$ (car O_3 est dense) et donc on peut trouver un x_3 et un $r_3>0$ tels que

$$\overline{B}(x_3,r_3)\subset B(x_2,r_2)\cap O_3\ \text{ et }\ r_3\leqslant\frac{r_2}{2}$$

et ainsi de suite : si on a construit $B(x_n,r_n)$ on construit $B(x_{n+1},r_{n+1})$ tel que

$$\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1})\subset B(x_n,r_n)\cap O_{n+1}\ \text{ et }\ r_{n+1}\leqslant\frac{r_n}{2}.$$

On va maintenant appliquer le Théorème 4.3.4 (de Cantor) avec $F_n = \overline{B}(x_n, r_n)$. Vérifions que cela est possible. Comme

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$$

on a que $F_{n+1} \subset F_n$. Aussi $diam(F_n) \leqslant 2r_n \to 0$ et $F_n \neq \emptyset$, pour tout $n \geqslant 1$. Par le Théorème de Cantor. On en déduit alors qu'il existe $a \in E$ tel que

$$\cap_{n\geqslant 1} F_n = \cap_{n\geqslant 1} \overline{B}(x_n, r_n) = \{a\}.$$

Par construction, on a $\overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n$, et donc $a \in O_n$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part,

$$B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset \cdots \subset B(x_1, r_1) \subset \Omega.$$

Donc $a \in \Omega$. Ainsi $\Omega \cap A \neq \emptyset$ car $a \in \Omega \cap (\cap_{n\geqslant 1} O_n)$ et on a bien que A est dense. ■

Corollaire 4.3.6 *Soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n) \subset E$ une suite de fermés tels que $\forall n \geqslant 1$ F_n soit d'intérieur vide. Alors*

$$\cup_{n\geqslant 1} F_n$$

est d'intérieur vide.

Démonstration. Soit $O_n = E \backslash F_n$. Alors O_n est ouvert et comme $\overline{O_n} = E \backslash F_n^\circ = E \backslash \emptyset = E$ on a que O_n est dense. Par le lemme de Baire il vient donc que $A = \cap_{n\geqslant 1} O_n$ est dense. Mais $A = \cap_{n\geqslant 1}(E \backslash F_n) = E \backslash (\cup_{n\geqslant 1} F_n)$. Alors comme A est dense il vient directement que l'intérieur de $\cup_{n\geqslant 1} F_n$ est vide. ■

Corollaire 4.3.7 *Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et (F_n) une suite de fermés telle que $\cup_{\geqslant 1} F_n = E$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0}^\circ \neq \emptyset$.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que $F_n^\circ = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors par le corollaire précédent il vient que l'intérieur de $\cup_{n\geqslant 1} F_n = \emptyset$. D'où $E^\circ = \emptyset$ et donc $E = \emptyset$ ce qui est absurde. ■

Exercices : Résoudre l'Exercice 4.7.

4.4 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et $(x_n) \subset E$. On dira que la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ est *convergente* si la suite $(S_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i)$ converge (vers $S \in E$). On écrit alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = S.$$

Remarque 4.4.1 *On vérifie immédiatement que, si la série converge, la suite (S_n) est de Cauchy. Si $(E, ||\cdot||)$ est complet la réciproque est aussi vraie.*

Définition 4.4.2 *Une série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *est dite* normalement convergente *si la série des normes* $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ *est convergente.*

On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.4.3 (Convergence des séries normalement convergentes) *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace de Banach alors toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le critère de Cauchy :

$$\Big|\Big|S_m - S_n\Big|\Big| = \Big|\Big| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \Big|\Big| \leqslant \sum_{i=n}^{m} ||x_i|| \to 0 \quad \text{si } n, m \to \infty.$$

■

Remarque 4.4.4 *(i) L'intérêt du Théorème 4.4.3 est qu'il permet de ramener le problème de la convergence d'une série dans un espace normé à un problème de convergence d'une série à termes positifs pour lesquelles on dispose de nombreux critères de convergence.*

(ii) La réciproque du Théorème 4.4.3 est aussi vraie dans le sens suivant : On peut montrer qu'un espace vectoriel normé dans lequel toute série normalement convergente est convergente est un Banach (voir Exercice 4.9).

Application 4.4.5 (Exponentielle d'une application linéaire) *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace de Banach. On a vu que* $\mathcal{L}(E, E)$ *est un espace de Banach (voir le Théorème 4.2.1). Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E)$*, on note*

$$f^n = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f \ \text{ où } n \text{ apparaît } n \text{ fois et } f^0 = Id.$$

On a $||f^0|| = 1$ *et*

$$||f^n|| = ||f \circ f \circ \cdots \circ f|| \leqslant ||f|| \, ||f|| \cdots ||f|| = ||f||^n.$$

Comme la série numérique

$$\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} \frac{||f||^n}{n!}$$

est convergente (et que sa somme est $e^{||f||}$*) on en déduit que*

$$\sum_{n \geqslant 0} \Big|\Big| \frac{1}{n!} f^n \Big|\Big|$$

est convergente, c'est à dire que

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^n$$

est normalement convergente (donc convergente par le Théorème 4.4.3) dans $\mathcal{L}(E,E)$. *On note* $exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n$ *et on appelle cette application linéaire l'exponentielle de* f. *On peut aussi monter que si* f, g *commutent, alors* $exp(f+g) = exp(f)exp(g)$.

De même, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, *où* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, *la série*

$$\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

est normalement convergente dans $M_n(\mathbb{K})$, *donc convergente. On note* $exp(A) = \sum_{n \geqslant 0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Application 4.4.6 (Inverse d'une application linéaire) *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un Banach et soit* $A \in \mathcal{L}(E,E)$ *tel que* $||A|| < 1$. *Alors* $Id - A$ *est inversible et*

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0}^{\infty} A^n = (Id + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots).$$

Nous venons de voir dans l'Application 4.4.5 que $||A^n|| \leqslant ||A||^n$. *Comme* $||A|| < 1$, *la série numérique*

$$\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} ||A||^n$$

est convergente et donc

$$\sum_{n \geqslant 0}^{\infty} A^n$$

est convergente par le Théorème 4.4.3. On note

$$S_n = Id + 1 + A^2 + \cdots + A^n \text{ et } S = \lim_{n \to \infty} S_n \text{ (dans } \mathcal{L}(E,E)).$$

On a, par calcul direct,

$$(Id - A) \circ S_n = S_n \circ (Id - A) = Id - A^{n+1}.$$

En passant à la limite il vient alors que

$$(Id - A) \circ S = S \circ (Id - A) = Id$$

où $S \in \mathcal{L}(E,E)$. *Donc* $Id - A$ *est inversible. Montrons maintenant que l'ensemble*

$$Isom(E,E) := \{A \in \mathcal{L}(E,E) : A \text{ inversible, } A^{-1} \in \mathcal{L}(E,E)\}$$

est un ouvert de $\mathcal{L}(E,E)$. *Soit* $T \in Isom(E,E)$. *On a, pour* $B \in \mathcal{L}(E,E)$,

$$T + B = T(Id + T^{-1}B).$$

Si $||B|| < \dfrac{1}{||T^{-1}||}$, *alors*

$$||T^{-1}B|| \leqslant ||T^{-1}|| \; ||B|| < 1.$$

D'après ce qui précède on a alors que $Id + T^{-1}B = Id - (-T^{-1}B)$ *est inversible. D'où* $T + B = T \circ (Id + T^{-1}B)$ *est inversible comme produit de deux applications inversibles.*

Exercices : Résoudre l' Exercice 4.8.

Chapitre 5

Espaces métriques compacts

5.1 Généralités

Définition 5.1.1 (Recouvrement, Sous-recouvrement) *Soit (E,d) un espace métrique. Une famille d'ensemble $(A_i)_{i\in I}$ est un* recouvrement *de E si*

$$\cup_{i\in I} A_i = E.$$

Si $J \subset I$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement *de E si et seulement si*

$$\cup_{j\in J} A_j = E.$$

Définition 5.1.2 (Ensemble compact) *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est* compact *si et seulement si de tout recouvrement de E par une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $E = \cup_{i\in I} O_i$, il existe $i_1, i_2, \cdots, i_n$ tels que $E = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.*

Remarque 5.1.3 (Les compacts sont bornés) *Si (E,d) est compact alors (E,d) est borné. En effet il suffit de d'écrire (recouvrir) E comme $E = \cup_{x\in E} B(x,1) \cap E$. Comme par hypothèse il existe un sous-recouvrement fini on a directement la résultat (et puisque une réunion finie de boules de rayon fini est un borné).*

Définition 5.1.4 (Espace séquentiellement compact) *Un espace métrique (E,d) est* séquentiellement compact *si toute suite $(x_n) \subset E$ possède une sous-suite convergente.*

Rappel 5.1.5 (Point d'accumulation) *On rappelle que $x_0 \in E$ est un* point d'accumulation *de $A \subset E$ et on note $x_0 \in A'$ si, $\forall r > 0$, $(B(x_0,r)\backslash\{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. De manière équivalente on a que $x_0 \in A'$ si et seulement si*

(i) Il existe une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \to x_0$.

(ii) Tout voisinage de x_0 contient une infinité d'éléments de A.

Remarquons aussi que $\overline{A} = A \cup A'$ et que A' est un fermé de E.

Définition 5.1.6 (Propriété de Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique* (E, d) *possède la* propriété de Bolzano-Weierstrass *si tout ensemble infini* $A \subset E$ *possède un point d'accumulation.*

Théorème 5.1.7 (Théorème Fondamental) *Soit* (E, d) *un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) (E, d) *est compact.*

(ii) (E, d) *possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.*

(iii) (E, d) *est séquentiellement compact.*

Démonstration. Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). On suppose donc (E, d) compact et on doit montrer que tout ensemble infini $A \subset E$ possède un point d'accumulation. Par l'absurde supposons qu'il existe $A \subset E$, A infini tel que $A' = \emptyset$. Puisque $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \emptyset = A$, il vient que $A \subset E$ est fermé. Donc $E \backslash A$ est ouvert. Maintenant puisque pour tout $a \in A$ on a $a \notin A'$ il existe $r_a > 0$ tel que $\Big(B(a, r_a) \backslash \{a\}\Big) \cap A = \emptyset$. Autrement dit $\exists r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \cap A = \{a\}$. Maintenant on écrit

$$E = \Big(\cup_{a \in A} B(a, r_a) \Big) \cup (E \backslash A).$$

Les $B(a, r_a) \subset E$ sont des ouverts, on a aussi montré que $E \backslash A$ est un ouvert. Donc on a recouvert E par des ouverts. Puisque E est compact on peut alors en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des points de A tel que

$$E = \Big(\cup_{i=1}^{n} B(a_i, r_{a_i}) \Big) \cup (E \backslash A).$$

Maintenant si $a \in A$ on a nécessairement que $a \in \cup_{i=1}^{n} B(a_i, r_{a_i})$. Mais $B(a_i, r_{a_i}) \cup A = \{a_i\}$ et il vient donc que a est l'un des $a_1, a_2, \cdots, a_n$. On a donc prouvé que $A \subset \{a_1, \cdots, a_n\}$, donc que A est fini, ce qui est absurde. A ce point on a prouvé que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Montrons que (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $(x_n) \subset E$. On va montrer que (x_n) admet une sous-suite convergente. Pour cela on pose $A = \{x_n : n \geqslant 1\}$ et on distingue deux cas :

Cas 1 : A est fini. Dans ce cas la suite $(x_n) \subset E$ ne prend qu'un nombre finie de valeurs. Donc il existe une valeur qui est prise une infinité de fois. Il existe donc une sous-suite (x_{n_k}) tel que $x_{n_k} = x =$ constante, pour tout $k \geqslant 1$. Alors trivialement $x_{n_k} \to x$.

Cas 2 : A est infini. Comme (E, d) possède la propriété de Bolzano-Weierstrass $A' \neq \emptyset$. Soit $x \in A'$. Alors $\Big(B(x, 1) \backslash \{x\}\Big) \cap A \neq \emptyset$. Donc $\exists x_{n_1}$ tel que $d(x_{n_1}, x) < 1$. Supposons que l'on a construit $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k} \in A$ tels que $x_{n_i} \neq x$, $d(x_{n_i}, x) < \frac{1}{i}$ et $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Soit

$$r = min\Big(d(x_{n_1}, x), \cdots, d(x_{n_k}, x\Big), \frac{1}{k+1}).$$

Alors $r > 0$. Comme $\Big(B(x, r) \backslash \{x\}\Big) \cap A$ contient une infinité d'éléments de A, il existe $x_{n_{k+1}}$ tel que $n_{k+1} > n_k$ et $x_{n_{k+1}} \in B(x, r) \backslash \{x\}$. En particulier $d(x_{n_{k+1}}, x) < r \leqslant \frac{1}{k+1}$. Ainsi on construit (par récurrence) une sous-suite (x_{n_k}) telle que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$, donc $x_{n_k} \to x$.

Donc on a montré que toute suite de E possède une sous-suite convergente, c'est à dire que (iii) est vrai. Pour compléter la preuve du théorème il reste à montrer la partie la plus difficile à savoir que (iii) $\Longrightarrow$ (i). Pour cela on aura besoin de deux lemmes préliminaires :

Lemme 5.1.8 (Lemme de Lebesgue) *Soit (E, d) un espace métrique séquentiellement compact. Alors pour tout recouvrement $(U_i)_{i\in I} \subset E$ avec des ensembles ouverts, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_i$.*

Démonstration. [Preuve du Lemme de Lebesgue] Par l'absurde supposons que le lemme soit faux. Alors : $\forall r > 0$, $\exists x \in E$ tel que $B(x, r)$ n'est contenue dans aucun des U_i. En particulier, $\forall n \geqslant 1$ il existe $x_n \in E$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est contenue dans aucun des $U_i, i \in I$. Comme (E, d) est séquentiellement compact, la suite $(x_n) \subset E$ possède une sous-suite convergente : $\exists (x_{n_k})$ et $\exists x \in E$ tel que $x_{n_k} \to x$. Comme $x \in E = \cup_{i\in I} U_i$, il existe i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, 2r) \subset U_{i_0}$. Maintenant comme $x_{n_k} \to x$, il existe k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0$ on a

$$d(x_{n_k}, x) < r \quad \text{ et } \quad \frac{1}{n_k} < r.$$

Montrons que $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(x, 2r)$. En effet, si $y \in B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ on a

$$d(y, x) < d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x) < r + r < 2r.$$

Donc $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(x, 2r) \subset U_{i_0}$. Cela est absurde car $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ n'est contenue dans aucun des U_i. Le lemme le Lebesque est donc démontré. ∎

Lemme 5.1.9 *Soit (E, d) un espace métrique séquentiellement compact. Alors $\forall r > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$ tel que $E = \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$.*

Démonstration. [Preuve du Lemme] Supposons, par l'absurde, que c'est faux. Alors il existe $r > 0$ tel que E ne peut pas être recouvert par un nombre fini de boules de rayons $r > 0$. Soit $x_1 \in E$. Alors $B(x_1, r) \neq E$, donc il existe $x_2 \in E \backslash B(x_1, r)$. On a $B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq E$, donc $\exists x_3 \in E \backslash (B(x_1, r) \cup B(x_2, r))$ et ainsi de suite. Supposons que l'on a construit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tel que $x_{i+1} \neq B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \cup \cdots \cup B(x_i, r)$ pour $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Alors

$$d(x_{i+1}, x_j) \geqslant r, \forall j \leqslant i.$$

Comme $B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r) \neq E$, il existe

$$x_{n+1} \in E \backslash \Big(B(x_1, r) \cup \cdots B(x_n, r) \Big).$$

Par récurrence, on construit donc une suite (x_n) telle que $x_{n+1} \notin B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r), \forall n \geqslant 1$. Comme E est séquentiellement compact, (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente. Mais on a $d(x_n, x_m) \geqslant r$ si $m \neq n$. Donc $d(x_{n_k}, x_{n_p}) \geqslant r$ si $k \neq p$ ce qui est absurde. Le lemme est alors prouvé. ∎

Fin de la preuve du Théorème Fondamental : Il restait à montrer que (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit (E,d) un espace métrique séquentiellement compact. Montrons que (E,d) est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de E, où les U_i sont des ouverts. Par le lemme de Lebesgue, il existe $r>0$ tel que $\forall x\in E$, il existe $i\in I$ tel que $B(x,r)\subset U_i$. Par le second lemme, il existe $x_1,\cdots,x_n$ tel que $E\subset B(x_1,r)\cup B(x_2,r)\cup\cdots\cup B(x_n,r)$. Mais pour chaque $k=1,2,\cdots,n$ il existe $i_k\in I$ tel que $B(x_k,r)\subset U_{i_k}$. Alors $E\subset B(x_1,r)\cup\cdots\cup B(x_n,r)\subset U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots\cup U_{i_n}$. Donc $U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_n}$ est un sous-recouvrement fini de E. Donc E est compact. ■

Théorème 5.1.10 *Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$.*

(i) Si (A,d) est compact, alors A est fermé dans E.

(ii) Si (E,d) est compact et A est fermé alors (A,d) est compact.

Démonstration. Montrons (i). Soit (A,d) compact. On suppose que $(x_n)\subset A$ et $x_n\to x$ dans E. Comme (A,d) est séquentiellement compact (par le Théorème fondamental) il existe une sous-suite (x_{n_k}) et $y\in A$ tel que $x_{n_k}\to y$. Mais puisque $x_n\to x$ on a aussi $x_{n_k}\to x$ et par unicité de la limite il vient que $y=x$, d'où $x\in A$. Donc A est fermé.

Montrons (ii). Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A par des ouverts de A. Alors $\forall i\in I$, il existe U_i ouvert de E tel que $O_i=U_i\cap A$. On a $E=(E\backslash A)\cup(\cup_{i\in I}U_i)$. Comme $E\backslash A$ est ouvert il s'agit d'une recouvrement de E par des ouverts. Donc $\exists\, i_1,i_2,\cdots,i_n$ tels que

$$E=(E\backslash A)\cup(\cup_{i=1}^{n}U_i).$$

Alors $A\subset\cup_{i=1}^{n}U_i$ et aussi $A\subset\cup_{i=1}^{n}(U_i\cap A)=\cup_{i=1}^{n}O_i$. Donc (A,d) est compact. ■

Théorème 5.1.11 (Dans $\mathbb{R}^N$ les fermés bornés sont les compacts) *Un ensemble $K\subset\mathbb{R}^N$ est compact si et seulement si K est borné et fermé dans $(\mathbb{R}^N,|\cdot|)$.*

Démonstration. Si $K\subset\mathbb{R}^N$ est compact alors $K\subset\mathbb{R}^N$ est borné (voir la Remarque 5.1.3). Par le Théorème 5.1.10 K est fermé. Réciproquement supposons K fermé et borné. Puisque K est borné toute suite de K possède une sous-suite convergente (voir le cours de L_2). Maintenant puisque K est fermé la limite d'une telle suite est dans K. On en déduit que K est séquentiellement compact. Par le Théorème fondamental K est alors compact. ■

Proposition 5.1.12 (Produit d'espaces compacts) *Soient (E_1,d_1) et (E_2,d_2) deux espaces métriques compacts. Alors $E_1\times E_2$ (muni de la distance produit) est compact.*

Démonstration. Soit $\big((x_n,y_n)\big)\subset E_1\times E_2$ une suite quelconque. Alors la suite $(x_n)\subset E_1$ possède une sous-suite convergente (car E_1 est compact, donc séquentiellement compact par le Théorème fondamental). Soit (x_{n_k}) une telle sous-suite. Comme E_2 est compact, $(y_{n_k})\subset E_2$ possède une sous-suite convergente qu'on note $(y_{n_{k_p}})$. Alors $\big((x_{n_{k_p}},y_{n_{k_p}})\big)$ est une sous-suite convergente de (x_n,y_n). Donc $E_1\times E_2$ est séquentiellement compact et donc $E_1\times E_2$ est compact. ■

Théorème 5.1.13 (Les espaces compacts sont complets) *Soit (E,d) un espace métrique compact. Alors (E,d) est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. Comme E est compact, (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente. Mais une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente (voir la Proposition 4.1.3). Donc (x_n) est convergente. ∎

Exercices : Résoudre les Exercices 5.1, 5.2 et 5.3.

5.2 Fonctions continues sur un compact

Théorème 5.2.1 (L'image d'un compact est un compact) *Soient (E, d_1) et (F, d_2) deux espaces métriques et soit $f : E \to F$ une fonction continue. Si (E, d) est compact, alors $f(E)$ est un compact de (F, d_2). Plus généralement, si $K \subset E$ est un compact de E, alors $f(K)$ est un ensemble compact de (F, d_2).*

Démonstration. Supposons (E, d_1) compact. Soit (O_i) un recouvrement de $f(E)$, où les $O_i \subset F$ sont des ouverts. Puisque f est continue, $f^{-1}(O_i) \subset E$ est un ouvert pour tout $i \in I$. On a

$$f(E) \subset \cup_{i\in I} O_i \Longrightarrow E \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(O_i).$$

Donc $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ est un recouvrement de E par des ouverts. Comme (E, d) est compact il existe un sous-recouvrement fini, c'est à dire $\exists\, i_1, i_2, \cdots i_n$ tels que $E \subset f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_{i_n})$. Alors $f(E) \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$. Donc $\{O_{i_1}, \cdots, O_{i_n}\}$ est un sous-recouvrement fini de $f(E)$. Ainsi de tout recouvrement de $f(E)$ par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Donc $f(E)$ est un compact de (F, d_2).

Plus généralement, si $K \subset E$ est un compact de E alors (K, d) est un espace métrique compact (et cela même si (E, d) n'est pas compact). Comme la restriction de f à K est continue sur K par ce que l'on vient de prouver on a que $f(K)$ est compact dans (F, d_2). ∎

Corollaire 5.2.2 *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et soit $f : E_1 \to E_2$ bijective et continue. Si (E_1, d_1) est compact, alors $f^{-1} : E_2 \to E_1$ est continue (c'est à dire f est un homéomorphisme entre (E_1, d_1) et (E_2, d_2)).*

Démonstration. On va montrer que l'image inverse par f^{-1} de tout fermé de E_1 est un fermé de E_2. Cela prouvera que $f^{-1} : E_2 \to E_1$ est continue. Soit $F \subset E_1$ un fermé. Comme E_1 est compact alors $F \subset E_1$ est compact. Par le Théorème 5.2.1, $f(F) \subset E_2$ est un compact et donc $f(F) \subset E_2$ est fermé. Mais on vérifie facilement que $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$. Ainsi pour tout $F \subset E_1$ fermé on a que $(f^{-1})^{-1}(F) \subset E_2$ est fermé. Par suite $f^{-1} : E_2 \to E_1$ est bien continue. ∎

Théorème 5.2.3 (Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes) *Soit (E, d) un espace métrique compact non vide et soit $f : (E, d) \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f atteint son infimum et son supremum. En particulier elle est bornée.*

Démonstration. Nous allons donner deux preuves de ce théorème.

Preuve 1 : Puisque $f : E \to \mathbb{R}$ est continue et que (E, d) est compact il vient du Théorème 5.2.1 que $f(E) \subset \mathbb{R}$ est compact. Donc, par le Théorème 5.1.11, $f(E) \subset \mathbb{R}$ est fermé et borné. Puisque $f(E)$ est borné il vient que $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée. Puisque $f(E)$ est fermé l'infimum est le supremum appartiennent à $f(E)$ (voir cours de L2). On rappelle que ici que $sup(f) \in f(E) \iff \exists a \in E$ tel que $\sup(f) = f(a) = \max f(E)$. Idem pour l'infimum.

Preuve 2 : Soit $m = \inf_{x\in E} f(x)$. Alors $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et il existe une suite $(x_n) \subset E$ tel que $f(x_n) \to m$. En effet, si $m = -\infty$, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n$ tel que $f(x_n) < -n$. Si $m \in \mathbb{R}$, $m + \frac{1}{n}$ n'est plus un minorant de $f(E)$, donc $\exists x_n \in E$ tel que $m \leqslant f(x_n) \leqslant m + \frac{1}{n}$. Dans les deux cas on a $f(x_n) \to m$. Comme (E, d) est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite convergente. Il existe donc (x_{n_k}) et $x \in E$ tel que $x_{n_k} \to x$. Comme f est continue il vient que $f(x_{n_k}) \to f(x)$. D'autre part, $f(x_{n_k}) \to m$ car $(f(x_{n_k})$ est une sous suite de $(f(x_{n_k}))$. Par unicité de la limite il vient alors que $f(x) = m = \inf_{y\in E} f(y)$. Donc $m = f(x) \in \mathbb{R}$ et l'infimum est atteint. Idem pour $\sup_{y\in E} f(y)$. ■

Théorème 5.2.4 (une fonction continue sur un compact est uniformément continue) *Soit (E_1, d_1) un espace métrique compact et (E_2, d_2) un espace métrique. Soit $f : (E_1, d_1) \to (E_1, d_2)$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. On va montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in E_1$ avec $d_1(x, y) < \delta$ on a $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Supposons que cela ne soit pas vrai. Alors

$$\forall \delta > 0,\ \exists x, y \in E_1 \text{ tel que } d_1(x, y) < \delta \text{ et } d_1(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $\delta = \frac{1}{n}$, où $n \geqslant 1$, il existe $x_n, y_n \in E_1$ tels que

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d_2(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon. \tag{5.2.1}$$

Comme (E_1, d_1) est compact, la suite $(x_n) \subset E_1$ possède une sous-suite $(x_{n_k}) \subset E_1$ convergente vers un élément $x \in E_1$. On a alors

$$d_1(y_{n_k}, x) \leqslant d_1(y_{n_k}, x_{n_k}) + d_1(x_{n_k}, x) \leqslant \frac{1}{n_k} + d_1(x_{n_k}, x) \to 0.$$

Donc $y_{n_k} \to x$. Maintenant de la continuité de f en $x \in E$, il vient

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \text{ dans } E_2 \quad \text{et} \quad f(y_{n_k}) \to f(x) \text{ dans } E_2.$$

Alors

$$d_2(f(x_{n_k}, f(y_{n_k})) \leqslant d_2(f(x_{n_k}, f(x)) + d_2(f(x), f(y_{n_k})) \to 0.$$

D'autre part de (5.2.1) on a que $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geqslant \varepsilon$ pour tout k. Cette contradiction prouve le théorème. ■

Exercices : Résoudre les Exercices 5.4 et 5.5.

5.3 Compacité dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 5.3.1 (En dimension finie toute les normes sont équivalentes) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ une base de E. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^k \to E$ définie par

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in E.$$

Clairement Φ est une bijection de $\mathbb{R}^k$ dans E. On munit $\mathbb{R}^k$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par

$$||x||_\infty = ||(x_1, x_2, \cdots, x_k)||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i|$$

et E de la norme $||\cdot||_0$ définie par

$$||x||_0 = \Big|\Big| \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \Big|\Big|_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i|.$$

Il vient immédiatement que $\Phi : (\mathbb{R}^k, ||\cdot||_\infty) \to (E, ||\cdot||_0)$ est une isométrie et donc, en particulier, l'image par Φ de la sphère unité de $(\mathbb{R}^k, ||\cdot||_\infty)$ est la sphère unité de $(E, ||\cdot||_0)$ (c'est à dire $\{x \in E : ||x||_0 = 1\}$. Maintenant puisque Φ est continue et que la sphère unité de $(\mathbb{R}^k, ||\cdot||_\infty)$ est compacte (c'est un ensemble fermé-borné) on en déduit, par le Théorème 5.2.1, que la sphère unité de $(E, ||\cdot||_0)$ est aussi compacte. Soit N une norme quelconque sur E. Remarquons que

$$\begin{aligned} N(x) = N\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big) &\leqslant \sum_{i=1}^{k} N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{k} |x_i| N(e_i) \\ &\leqslant K||x||_0 \end{aligned}$$

où l'on a posé $K = \sum_{i=1}^{k} N(e_i)$. Ceci montre que N est continue sur $(E, ||\cdot||_0)$. Par le Théorème 5.2.3 il vient alors que, sur la sphère unité de $(E, ||\cdot||_0)$, N atteint son infimum et son maximum. En particulier il existe $\overline{x} \in E$ avec $||\overline{x}||_0 = 1$ tel que

$$N(x) \geqslant N(\overline{x}) = \alpha > 0 \text{ pour tout } x \in E \text{ tel que } ||x||_0 = 1.$$

Il vient alors que, pour tout $x \in E$,

$$N\Big(\frac{x}{||x||_0}\Big) \leqslant \alpha \;\text{ c'est à dire } N(x) \geqslant \alpha ||x||_0.$$

En utilisant l'existence d'un maximum on obtient de manière similaire que

$$N(x) \leqslant \beta ||x||_0 \;\text{ pour un } \beta > 0.$$

A ce point, voir la Remarque 3.3.8, on a bien montré que toutes les normes sont topologiquement équivalentes sur un espace de dimension finie. ■

Exercices : Résoudre l'Exercice 5.6.

5.4 Caractérisation de la dimension finie par la compacité

Le résultat suivant donne une caractérisation (topologique) de la dimension finie.

Théorème 5.4.1 *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. La boule fermée* $\overline{B}(0,1)$ *est compacte si et seulement si* E *est de dimension finie.*

Démonstration. Le fait que, si E est de dimension finie, alors la boule unité fermée est compacte résulte directement que l'observation, immédiate par la preuve du Théorème 5.3.1, que $\overline{B}(0,1)$ est compacte pour la norme $||\cdot||_0$ et du fait que toutes les normes sont équivalentes sur E. On sait en effet que la compacité est une notion topologique. Pour démontrer l'implication directe nous utiliserons le

Lemme 5.4.2 (Lemme de Riesz) *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. Soit* $F \subset E$ *un sous-espace fermé distinct de* E*. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $x_\varepsilon \in E$ *tel que* $||x_\varepsilon|| = 1$ *et* $dist(x_\varepsilon, F) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Démonstration. [Preuve du Lemme de Riesz] Soit $x \in E$, $x \notin F$. Soit $\delta > 0$ définit par $dist(x, F) = \delta$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $\exists y_\varepsilon \in F$ tel que

$$\delta \leqslant ||x - y_\varepsilon|| \leqslant \delta + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta.$$

Soit $x_\varepsilon = \dfrac{x - y_\varepsilon}{||x - y_\varepsilon||}$. Notons que $||x_\varepsilon|| = 1$. Pour $y \in F$ quelconque on a

$$||y - x_\varepsilon|| = \left|\left|y - \frac{x - y_\varepsilon}{||x - y_\varepsilon||}\right|\right| = \frac{1}{||x - y_\varepsilon||}\left|\left|\Big(||x - y_\varepsilon||y + y_\varepsilon\Big) - x\right|\right|. \tag{5.4.1}$$

Puisque $||x - y_\varepsilon||y + y_\varepsilon \in F$ on a que

$$\Big|\Big|\,||x - y_\varepsilon||y + y_\varepsilon - x\Big|\Big| \geqslant \delta. \tag{5.4.2}$$

Il vient alors de (5.4.1) et (5.4.2) que, $\forall y \in F$,

$$||y - x_\varepsilon|| \geqslant \frac{\delta}{||x - y_\varepsilon||} \geqslant \frac{\delta}{\delta + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta} = \frac{\delta(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)\delta + \varepsilon\delta} = 1 - \varepsilon.$$

Par suite on a bien que $dist(x_\varepsilon, F) \geqslant 1 - \varepsilon$. ∎

Suite de la preuve du Théorème 5.4.1 Il nous reste à montrer que si $\overline{B}(0,1)$ est compacte alors nécessairement E est de dimension finie. De la compacité de $\overline{B}(0,1)$ il résulte, voir le Lemme 5.1.9 qu'il existe $Z = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \overline{B}(0,1)$ tel que

$$dist(x, Z) \leqslant \frac{1}{4}, \forall x \in \overline{B}(0,1).$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par Z. Pour conclure il suffit de montrer que $F = E$. Puisque $F \supset Z$ on a que

$$dist(x, F) \leqslant dist(x, Z), \, \forall x \in E.$$

Si on suppose que $F \neq E$ il existe alors, par le Lemme de Riesz, un $x \in E$ avec $||x|| = 1$ tel que

$$dist(x, F) \geqslant \frac{3}{4}.$$

Notons que l'on peut utiliser le Lemme de Riesz car F est un espace de dimension finie donc complet (voir l'Exercice 5.6) et en particulier F est donc fermé dans E (voir la Proposition 4.1.6). On a alors aussi que $dist(x, Z) \geqslant \frac{3}{4}$. Maintenant comme $x \in \overline{B}(0, 1)$ cela contredit le fait que

$$dist(x, Z) \leqslant \frac{1}{4}, \, \forall x \in B(0, 1).$$

■

Remarque 5.4.3 *Dans l'énoncé du Théorème 5.4.1 on peut remplacer la boule unité fermé par n'importe quel ensemble fermé et borné de E.*

Exercices : Résoudre l'Exercice 5.7.

Chapitre 6

Espaces métriques connexes

6.1 Généralités

Définition 6.1.1 *Un espace métrique (E, d) est dit* connexe *si, en dehors de E et de $\emptyset$ il n'existe pas de partie à la fois ouverte et fermée. Une partie de A est dite connexe si (A, d) est connexe.*

Rappel 6.1.2 *On dit que $(A_i)_{i\in I}$ constitue une* partition *de E si*

$$\cup_{i\in I} A_i = E \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Remarque 6.1.3 *Dire que (E, d) est connexe est équivalent à dire qu'il n'existe pas de partition de E, $E = E_1 \cup E_2$ avec E_1, E_1 non vides tout deux ouverts (ou tout deux fermés). En effet si on suppose que E_1 et E_2 sont ouverts alors comme E_2 est le complémentaire de E_1 il doit être à la fois ouvert et fermé. D'où $E_2 = \emptyset$ où $E_2 = E$ en contradiction avec l'hypothèse. Idem pour E_1, E_2 fermés. Cela montre l'implication directe. Réciproquement s'il existe une partie à la fois ouverte et fermé $O \subset E$ telle que $O \neq E$ et $O \neq \emptyset$ alors on peut écrire $E = O \cup C_E O$. Ici $O \subset E$ est ouvert et $C_E O$ est aussi ouvert car $O \subset E$ est fermé. On a donc trouvé une partition de E en deux ouverts dont aucun n'est l'ensemble vide.*

Exemple 6.1.4 *(i) Soit $E = \{0, 1\}$ (muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$). Cet ensemble n'est pas connexe. Pour voir cela posons $O_1 = \{0\}$, $O_2 = \{1\}$ alors $O_1 =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}[\cap E$ et $O_2 =]\frac{2}{3}, \frac{3}{2}[\cap E$ sont des ouverts disjoints de E. On a de plus $O_1 \cup O_2 = E$ mais $O_1 \neq \emptyset$ et $O_2 \neq \emptyset$.*

(ii) Une partie $A \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe. En effet, il existe alors $x, y \in A$ et $a \in]x, y[$ tels que $a \notin A$. Les ensembles $A_1 =]-\infty, a[\cup A$ et $A_2 =]a, +\infty[\cup A$ forment une partition de A en deux ouverts (de A) non vides.

Proposition 6.1.5 (L'image d'un connexe par une application continue est connexe) *Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ deux espaces métriques et $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ continue. Si (E_1, d_1) est connexe alors $f(E_1)$ l'est aussi.*

Démonstration. Par hypothèse $f : (E_1, d_1) \to (f(E_1), d_2)$ est continue. Si $f(E_1)$ n'est pas connexe alors il existe O, O' deux ouverts non vides tels que $f(E_1) = O \cup O'$ soit une partition. Il vient alors que $E_1 = f^{-1}(O) \cup f^{-1}(O')$ est une partition de E_1 en deux ouverts non vides. Cette contradiction prouve la proposition. ■

Remarque 6.1.6 *Comme corollaire de la proposition précédente on déduit immédiatement que si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont homéomorphes et l'un est connexe, l'autre l'est aussi.*

Théorème 6.1.7 (Caractérisation d'un connexe par une application) *Un espace métrique (E, d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. Supposons tout d'abord (E, d) connexe. Soit $f : E \to \{0, 1\}$ continue. Par la Proposition 6.1.5, $f(E)$ est un sous-ensemble connexe de $\{0, 1\}$. Puisque $\{0, 1\}$ n'est pas connexe (voir la Remarque 6.1.4 (ii)) on a soit $f(E) = \{0\}$ soit $f(E) = \{1\}$. Donc f est constante.

Réciproquement on suppose que toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ est constante et on va montrer que (E, d) est connexe. Supposons par l'absurde que (E, d) ne soit pas connexe. Alors il existe O_1, O_2 ouverts disjoints avec $O_1 \neq \emptyset$ et $O_2 \neq \emptyset$ tel que $E = O_1 \cup O_2$. On définit alors $f : E \to \{0, 1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in O_1 \\ 0 \text{ si } x \in O_2. \end{cases}$$

Alors $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = O_2$, $f^{-1}(\{1\}) = O_1$ et $f^{-1}(\{0, 1\}) = O_1 \cup O_2$. Donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E pour tout ouvert U de $\{0, 1\}$. Cela montre que f est continue. Pourtant f n'est pas constante. Cette contradiction montre que (E, d) est connexe. ■

Proposition 6.1.8 *Soit (E, d) un espace métrique et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles connexes de E tels que $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $A = \cup_{i \in I} A_i$ est un connexe de (E, d).*

Démonstration. Soit $a \in \cap_{i \in I} A_i$, alors $a \in A_i$ pour tout $i \in I$. Soit $f : A \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Alors la restriction $f_{|A_i}$ de f à A_i est continue pour chaque $i \in I$. Comme A_i est connexe forcément $f_{|A_i}$ est constante et donc $f(x) = f(a)$, pour tout $x \in A_i$. Ceci est vrai pour tout $i \in I$. Puisque pour tout $x \in A$ il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ on a que $f(x) = f(a)$. Donc f est constante sur A et par le Théorème 6.1.7 il vient que A est connexe. ■

Proposition 6.1.9 (La fermeture d'un connexe est connexe) *Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$ un ensemble connexe. Alors tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. En particulier $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : B \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Alors $f_{|A}$ est une fonction continue sur A à valeurs dans $\{0, 1\}$. Comme A est connexe, $f_{|A}$ est constante, on note $a \in \{0, 1\}$ la valeur de la constante. Soit $x \in B$. Comme $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n) \subset A$ tel que $x_n \to x$. Alors $f(x_n) = a, \forall n \in \mathbb{N}$ (car $x_n \in A$) et aussi $f(x_n) \to f(x)$ car f est continue. D'où $f(x) = a$. Donc f est constante sur B et donc B est connexe, par le Théorème 6.1.7. ■

6.2 Connexes dans $\mathbb{R}$

Théorème 6.2.1 (Dans $\mathbb{R}$ les connexes sont les intervalles) *Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et connexe si et seulement si $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.*

Démonstration. On sait déjà, voir l'Exemple 6.1.4 (ii) que si A est connexe, A est un intervalle. Supposons donc que $A \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle et montrons que $A \subset \mathbb{R}$ est connexe. Soit $f : A \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Si f n'est pas constante il existe $a, b \in A$ tel que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Comme A est un intervalle f possède la propriété de la valeur intermédiaire, à savoir qu'il existe c compris entre a et b (et donc $c \in A$) tel que $f(c) = \frac{1}{2}$. Cela est absurde et donc f est constante. Par suite A est connexe, par le Théorème 6.1.7. ∎

Théorème 6.2.2 (Généralisation du Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit (E, d) un espace métrique connexe et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(E)$ est un intervalle.*

Démonstration. Du fait que E est connexe et f est continue il vient, de la Proposition 6.1.5 que $f(E)$ est un connexe de $\mathbb{R}$. Donc $f(E)$ est un intervalle (voir l'Exemple 6.1.4 (ii)). ∎

6.3 Connexité par arcs

Définition 6.3.1 *(E, d) est dit* connexe par arc *si pour tout $x, y \in E$ il existe $\phi : [0, 1] \to E$ continue telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$ (on dit alors que ϕ est un arc d'extrémités x et y.)*

Théorème 6.3.2 (La connexité par arc implique la connexité) *Soit (E, d) un espace métrique connexe par arc. Alors (E, d) est connexe.*

Démonstration. Pour tout $x, y \in E$ l'image de l'arc qui les joint est connexe, c'est à dire $\{\phi(\lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$ est connexe (voir la Proposition 6.1.5). Or E peut s'écrire comme la réunion des arcs joignant un point fixé $\overline{x}$ aux points de $x \in E$ et l'on conclut grâce à la Proposition 6.1.8. ∎

Remarque 6.3.3 *La réciproque du Théorème 6.3.2 est fausse. C'est à dire qu'il existe des espaces métriques connexes qui ne sont pas connexes par arcs.*

6.4 Composantes connexes

Théorème 6.4.1 *Soit (E, d) un espace métrique et soit $x \in E$. Il existe un plus grand (au sens de l'inclusion) sous-ensemble connexe de E qui contient $x \in E$.*

Démonstration. On pose

$$\mathbb{A} = \{A \subset E : A \text{ connexe et } x \in A\}.$$

Comme $\{x\}$ est connexe et $\{x\} \in \mathbb{A}$ on a $\mathbb{A} \neq \emptyset$. On a aussi $\cap_{A\in\mathbb{A}} A \neq \emptyset$ car $x \in \cap_{A\in\mathbb{A}} A$. D'après la Proposition 6.1.8 on a que $C = \cup_{A\in\mathbb{A}} A$ est connexe dans E. Clairement C est le "plus grand" connexe contenant $x \in E$. En effet, si D est connexe et $x \in D$, alors $D \in \mathbb{A}$ donc $D \subset \cup_{A\in\mathbb{A}} = C$. ∎

Définition 6.4.2 (Composante connexe) *On note $C(x)$ le plus grand ensemble connexe de E contenant $x \in E$ et on l'appelle la* composante connexe *de $x \in E$.*

Proposition 6.4.3 *$C(x)$ est un fermé de (E, d).*

Démonstration. Puisque $C(x)$ est connexe on a, par la Proposition 6.1.9, que la fermeture $\overline{C(x)}$ de $C(x)$ est connexe. Comme $x \in \overline{C(x)}$ on a que $\overline{C(x)} \subset C(x)$. Evidemment on a aussi que $C(x) \subset \overline{C(x)}$. D'où $C(x) = \overline{C(x)}$ c'est à dire que $C(x)$ est fermé. ∎

Proposition 6.4.4 (Homéomorphisme et composantes connexes) *Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont homéomorphes alors leurs composantes connexes se correspondent par l'homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ une bijection bicontinue. Soit $x \in E_1$, par la Proposition 6.1.5, $f(C(x))$ est connexe et contient $f(x)$. Donc $f(C(x)) \subset C(f(x))$. Supposons, par l'absurde, que

$$f(C(x)) \neq C(f(x)).$$

Alors $C(x) \neq f^{-1}(C(f(x))$. Or $C(f(x))$ est connexe et f^{-1} est continue, donc $f^{-1}(C(f(x))$ est un connexe. C'est une contradiction avec la définition de $C(x)$ car on a $C(x) \subset f^{-1}(C(f(x))$. ∎

Remarque 6.4.5 *On utilise souvent la Proposition 6.4.4 pour montrer que deux espaces métriques ne sont pas homéomorphes. Par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes car sinon, en notant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'homéomorphisme éventuel, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ serait homéomorphe à $\mathbb{R}^2\backslash\{f(0)\}$. Or $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ a deux composantes connexes alors que $\mathbb{R}^2\backslash\{f(0)\}$ est connexe (car connexe par arc).*

Index

Deuxième partie

Travaux dirigés (20h)

Chapitre 1

Série 1

1.1 Enoncés des exercices

Exercice 1.1 *Dans* $\mathbb{R}^2$*, dessiner les boules ouvertes de centre* 0 *et de rayon* 1 *pour les distances suivantes :*

- $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
- $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
- $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

Corrigé

Exercice 1.2 (Les espaces métriques sont séparables) *Soit* (E,d) *un espace métrique. Montrer que pour tout* $x, y \in E$ *avec* $x \neq y$ *il existe deux ouverts* O_x*,* O_y *tels que* $x \in O_x$*,* $y \in O_y$ *et* $O_x \cap O_y = \emptyset$*.*

Corrigé

Exercice 1.3 *Soit* E *un ensemble non vide. Soit* d *une distance sur* E*. Montrer que* $\delta = min(1,d)$ *est une distance sur* E*.*

Corrigé

Exercice 1.4 *(i) Soient* d_1, d_2 *deux distances sur l'ensemble* E*. On suppose qu'il existe* $C_1, C_2 > 0$ *tels que*

$$\forall x,y \in E,\ C_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant C_2 d_1(x,y). \tag{1.1}$$

Montrer que d_1 *et* d_2 *sont topologiquement équivalentes.*

(ii) Soit (E,d) *un espace métrique. Montrer que* $d' = \frac{d}{1+d}$ *est une distance sur* E *topologiquement équivalente à* d*.*

(iii) En prenant $E = \mathbb{R}$*,* $d(x,y) = |x-y|$ *au point(ii) montrer que* d *et* d' *ne vérifient pas la double inégalité.*

Corrigé

Exercice 1.5 *(i) Soit $\delta_1, ..., \delta_n : E \times E \to [0, \infty[$ des semi-distances sur E. Montrer que $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ et $\delta' = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$ sont des semi-distances.*

(ii) Soit $\delta : E \times E \to [0, +\infty[$ une semi-distance sur E et $\alpha : E' \to E$ quelconque. Montrer que δ' définie par $\delta'(x', y') = \delta(\alpha(x'), \alpha(y'))$ est une semi-distance sur E'.

Corrigé

Exercice 1.6 *Soit E un ensemble non vide. Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.*

(i) Montrer que d est une distance sur E.

(ii) Déterminer pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$ les boules ouvertes $B(x, r)$. En déduire tous les ouverts et les fermés de (E, d).

Corrigé

Exercice 1.7 *(i) Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ un ensemble. Montrer que $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$.*

(ii) Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$. Soit $A =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Déterminer $\overline{A}$, A°. En déduire ∂A, $\partial \overline{A}$, ∂A°.

Corrigé

Exercice 1.8 *Soit (E, d) un espace métrique, A, B deux parties non vides de E, A ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Donner un contre-exemple dans $\mathbb{R}$ lorsque A n'est pas ouvert.*

Corrigé

Exercice 1.9 *Soit d_1, d_2 deux distances sur un ensemble E non vide. Montrer que si pour toute suite (x_n) d'éléments de E et tout $x \in E$ on a la propriété :*

$$x_n \to x \text{ au sens } d_1 \text{ si et seulement si } x_n \to x \text{ au sens } d_2,$$

alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes. Est ce que cette condition est nécessaire ?

Corrigé

Exercice 1.10 *(i) Montrer que $d : (x, y) \to \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ est une distance sur $]0, 1[$.*

(ii) Montrer que d est topologiquement équivalente sur $]0, 1[$ à d_0 définie par $d_0(x, y) = |x - y|$.

(iii) Montrer qu'il n'existe pas de distance D sur $\mathbb{R}$ topologiquement équivalente à d_0 sur $\mathbb{R}$ telle que D et d coincident sur $]0, 1[$.

Corrigé

Exercice 1.11 *Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$. Soit $B \subset A$ un ouvert de (A, d). B est-il nécessairement un ouvert de (E, d) ? Trouver une condition simple sur A qui garantisse que c'est le cas.*

Corrigé

Exercice 1.12 *Soit $p > 1$ et q défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(i) Soit $y \in \mathbb{R}^+$. Pour $x \geqslant 0$ on pose

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Déterminer $\overline{x} \in \mathbb{R}^+$ tel que $f'(\overline{x}) = 0$ et calculer $f(\overline{x})$.

(ii) En déduire que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

(iii) Soient $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $p > 1$. En appliquant b) avec

$$x = \frac{|a_i|}{(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } y = \frac{|b_i|}{(\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$$

démontrer l'inégalité de Hölder :

$$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leqslant (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) Montrer l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i||a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |b_i||a_i + b_i|^{p-1}$$

puis en déduire l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Corrigé

1.2 Corrigés des exercices

Exercice 1.1

On a, par définition $B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_i(x-0, y-0) = d_i(x,y) < 1\}$ pour $i = 1, 2, \infty$. Pour d_1 on obtient un losange s'appuyant sur les points $(-1,0), (0,1), (1,0), (0,-1)$. Pour d_2 la sphère usuelle centrée en $(0,0)$ et de rayon 1. Pour d_∞ on obtient le carré de coté 1 centré en $(0,0)$. On vérifie sur ces examples que la notion de boule dépend de la distance choisie.

Exercice 1.2

Soit $d = d(x,y) > 0$. Il suffit de prendre $O_1 = B(x, \frac{d}{3})$, $O_2 = B(y, \frac{d}{3})$.

Exercice 1.3

On va vérifier les trois propriétés qui définissent une distance.

(i) $\delta(x,y) = 0 \Longrightarrow \min(1, d(x,y)) = 0 \Longrightarrow d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$. Aussi, si $x = y$ alors $\delta(x,y) = 0$.

(ii) $\min(1, d(x,y)) = \min(1, d(y,x))$ évidemment.

(iii) A t-on que $\delta(x,z) \leqslant \delta(x,y) + \delta(y,z)$? On va pour montrer que c'est vrai en distinguant plusieurs cas.

Supposons que $d(x,z) \leqslant 1$ alors c'est clairement ok par l'inégalité triangulaire appliquée à $d(x,z)$.

Supposons que $d(x,z) > 1$. A-t-on alors

$$1 \leqslant \delta(x,y) + \delta(y,z)\,?$$

C'est clairement ok si $d(x,y) \geqslant 1$ ou $d(y,z) \geqslant 1$. Si cela n'est pas le cas et comme $d(x,z) > 1$ il suffit de remarquer que, puisque par l'inégalité triangulaire, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, on a nécessairement que $d(x,y) + d(y,z) > 1$.

Exercice 1.4

(i) Ce point à déjà été montré dans le cours (voir la Proposition 1.1.14).

(ii) Par définition deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts. Cela sera clairement le cas si toute boule centrée en un point pour une distance contient une boule centrée en ce point pour l'autre distance. Montrons donc que $\forall x \in E, \forall r > 0$ il existe $r' > 0$ tel que

$$B_{d'}(x, r') \subset B_d(x, r).$$

Pour cela il faut montrer que, $r > 0$ étant fixé on peut trouver un $r' > 0$ (assez petit) pour lequel

$$\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} < r' \Longrightarrow d(x,y) < r.$$

Mais

$$d(x,y) < r' + r'd(x,y) \Longrightarrow d(x,y)(1 - r') < r' \Longrightarrow d(x,y) < \frac{r'}{1 - r'}$$

et en prenant $r' > 0$ assez petit on a bien que $\frac{r'}{1-r'} < r$. On procède de même pour l'inclusion d'une boule $B_d(x,r) \subset B_{d'}(x,r)$.

(iii) On voit que si $|x - y| \to \infty$ alors

$$\frac{|x-y|}{1 + |x-y|} \to 1.$$

On ne peut donc pas satisfaire l'équation (1.1) (raisonner par l'absurde en posant $d_1 = d$, $d_2 = d'$ et en supposant que $C_1 > 0$ existe).

Exercice 1.5

Pour montrer que δ est une semi-distance il faut vérifier que

(i) Si $x = y$ alors $\delta(x, y) = 0$.

(ii) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$, $\forall x, y \in E$.

(iii) $\delta(x, z) \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z)$, $\forall x, y, z \in E$.

(i) Montrons que $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ et $\delta = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$ sont des semi-distances. Pour $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ on a

(i) C'est évident.

(ii) C'est evident aussi.

(iii) On écrit

$$\begin{aligned} \delta(x, z) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x, z) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x, y) + \delta_i(y, z) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(y, z). \end{aligned}$$

Pour $\delta' = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$ on a

(i) Evident.

(ii) Evident.

(iii) Pour un $j = 1, \cdots, n$ on a

$$\begin{aligned} \delta'(x, z) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i(x, z) &= \delta_j(x, z) \\ &\leqslant \delta_j(x, y) + \delta_j(y, z) \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i(x, y) + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i(y, z). \end{aligned}$$

(ii) On a

(i) Si $x' = y'$ alors $\alpha(x') = \alpha(y')$ d'où $\delta'(x', y') = 0$.

(ii) $\delta(\alpha(x'), \alpha(y')) = \delta(\alpha(y'), \alpha(x'))$ car δ est une semi-distance.

(iii) On écrit

$$\begin{aligned} \delta'(x', z') = \delta(\alpha(x'), \alpha(z')) &\leqslant \delta(\alpha(x'), \alpha(y')) + \delta(\alpha(y'), \alpha(z')) \\ &= \delta'(x', y') + \delta'(y', z'). \end{aligned}$$

Exercice 1.6

(i) Montrons que d est une distance sur E.

(a) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ est évident.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ est évident.

(c) Si $d(x, z) = 0$ c'est ok. Sinon $x \neq z$ et on ne peut pas à la fois avoir $x = y$ et $y = z$. D'où l'un des deux nombres $d(x, y)$ ou $d(y, z)$ est égal à 1 et on a le résultat.

(ii) Par définition $B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$. Si $r \in]0,1]$ on a $B(x,r) = \{x\}$. Si $r > 1$ on a $B(x,r) = E$. On se souvient (voir la Remarque 1.1.8) que les ouverts sont exactement les réunion de boules ouvertes. Par suite n'importe quelle partie de E est un ouvert (et idem pour les fermés).

Exercice 1.7

(i) Il s'agit ici de montrer que $\overline{A} \cap \overline{C_E A} = \overline{A} \backslash A^\circ$. Si $x \in \overline{A} \backslash A^\circ$ alors $x \in \overline{A}$ et comme $x \notin A^\circ$, toute boule centrée en x rencontre $C_E A$. D'où $x \in \overline{C_E A}$. D'où $x \in \overline{A} \cap \overline{C_E A}$.

Réciproquement si $x \in \overline{A} \cap \overline{C_E A}$ alors $x \in \overline{A}$ et toute boule centrée en x rencontre $C_E A$. D'où $x \notin A^\circ$. D'où $x \in \overline{A} \backslash A^\circ$.

(ii) Il vient immédiatement $\overline{A} = [0,1]$, $A^\circ = \emptyset$. Maintenant comme $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$ il vient $\partial A = \overline{A} = [0,1]$. Aussi $\partial \overline{A} = \overline{\overline{A}} \backslash (\overline{A})^\circ$ et donc $\partial \overline{A} = [0,1] \backslash]0,1[= \{0,1\}$. Finalement $\partial A^\circ = \overline{A^\circ} \backslash (A^\circ)^\circ = \overline{A^\circ} = \emptyset$.

Exercice 1.8

Soit $x \in A \cap \overline{B}$, il faut montrer que toute boule centrée en x contient un point de $A \cap B$. Puisque $x \in A$ et que A est ouvert il existe une boule centrée en x entièrement contenue dans A et comme $x \in \overline{B}$ elle rencontre B. On prend alors ce point.

Pour le contre-exemple on peut prendre : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Il vient $A \cap \overline{B} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$. Mais $A \cap B = \emptyset$ et donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

Exercice 1.9

On va utiliser le fait que deux distances sont topologiquement équivalentes si elles définissent les mêmes fermés (car alors les ouverts sont les mêmes). Montrons tout d'abord que si F est un fermé au sens d_1 alors F est fermé au sens d_2. Pour cela on va utiliser les suites. Soit $(x_n) \subset F$ tel que $x_n \to x \in E$ au sens d_2, il faut montrer que $x \in F$. Mais par hypothèse on a alors que $x_n \to x$ au sens d_1 et comme F est un fermé de E on a que $x \in F$. On conclut par l'unicité de la limite. Les rôles de d_1 et d_2 étant symétrique cela termine la preuve.

Cet exercice montre qu'il est suffisant de montrer que

$$x_n \to x \text{ au sens } d_1 \text{ si et seulement si } x_n \to x \text{ au sens } d_2$$

pour prouver que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes. Clairement la réciproque est vraie car la notion de convergence de suite ne dépend que de la notion d'ouvert.

Exercice 1.10

(i) Il convient principalement de vérifier (les deux autres propriétés sont immédiates) que

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), \quad \forall x,y,z \in]0,1[.$$

Mais

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\Big| &= \Big|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\Big|+\Big|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\Big| \\ &= d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

(ii) Puisque la convergence des suites défini la topologie (voir l'Exercice 1.9) il suffit de vérifier que

$$x_n \to x \text{ au sens } d \text{ si et seulement si } x_n \to x \text{ au sens } d_0.$$

Il est clair que $x_n \to x$ au sens d implique que $x_n \to x$ au sens d_0 car, comme $|x|, |x_n| < 1$,

$$\Big|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}\Big| = \Big|\frac{x-x_n}{xx_n}\Big| \geqslant |x-x_n|.$$

Réciproquement si $x_n \to x$ au sens d_0 alors, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand (x_n) reste bornée loin de zéro, disons que $x_n \geqslant \frac{x}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand et il vient alors que

$$\Big|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}\Big| \leqslant \frac{2}{x^2}\,|x-x_n|.$$

(iii) Supposons, par l'absurde, qu'une telle distance D existe. On considère alors la suite des couples $(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{4n}) \subset]0,1[$ pour $n \geqslant 1$. Comme d et d_0 sont topologiquement équivalentes sur $\mathbb{R}$ et que $d_0(\frac{1}{2n},0) \to 0$ on a que $D(\frac{1}{2n},0) \to 0$. De même $D(\frac{1}{4n},0) \to 0$. Maintenant, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$D(\frac{1}{2n},\frac{1}{4n}) \leqslant D(\frac{1}{2n},0)+D(\frac{1}{4n},0).$$

Comme, par hypothèse, $D(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{4n}) = d(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{4n}) = 2n$ on obtient alors une contradiction.

Exercice 1.11

On rappelle que $B \subset A$ est un ouvert de (A,d) si et seulement si $B = O \cap A$ où $O \subset E$ est un ouvert de E. On voit que si $A \subset E$ est un ouvert alors tout ouvert de de (A,d) est aussi un ouvert de (E,d). En revanche si $A \subset E$ n'est pas un ouvert de E alors cela n'est pas vrai. Comme contre exemple considérons : $A = [0,1[$ et $B = [0,\frac{1}{2}[$. B est un ouvert de A car $B =]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\cap A$ mais B n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.12

(i) On a $f'(x) = x^{p-1} - y$. D'où $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = (y)^{\frac{1}{p-1}}$. Posons $\bar{x} = (y)^{\frac{1}{p-1}}$ il vient

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{y^p}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1}$$

ou encore

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{p}y^q + \frac{1}{q}y^q - y^q = 0.$$

Puisque $\bar{x}$ est un minimum global on a donc $f(x) \geqslant f(\bar{x}), \forall x \geqslant 0$.

(ii) C'est évident par la définition de f.

(iii) Pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a

$$\frac{|a_i|\,|b_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}.$$

En sommant sur $i = 1, \cdots, n$ il vient

$$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|\,|b_i|}{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On dérive alors l'inégalité de Hölder,

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i b_i\Big| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) On a

$$\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p = \sum_{i=1}^n |a_i + b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)|a_i + b_i|^{p-1}.$$

Mais par Hölder

$$\sum_{i=1}^n |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

et

$$\sum_{i=1}^n |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque

$$q(p-1) = \frac{p}{p-1}(p-1) = p$$

on en déduit que

$$\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \leqslant \Big[\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \Big(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Finalement puisque

$$1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$$

on obtient le résultat.

Chapitre 2

Série 2

2.1 Enoncés des exercices

Exercice 2.1 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé sur* $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que la distance d *associée à* $\|.\|$ *vérifie :*

$$\forall x, y, t \in E,\ d(x+t, y+t) = d(x,y),$$

$$\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R},\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y).$$

(ii) Montrer (si E *n'est pas réduit à un point) que quelle que soit la distance* d', $d = \min\{1, d'\}$ *est une distance qui ne découle pas d'une norme.*

Corrigé

Exercice 2.2 *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé.*

(i) Soit F *un sous-espace vectoriel de* E. *Montrer que* $\overline{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

(ii) Soit F *un sous-espace vectoriel de* E *d'intérieur non vide. Montrer que* $F = E$.

Corrigé

Exercice 2.3 *(i) Montrer que dans tout espace métrique on a :* $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r)$ *(* $B'(x,r)$ *désigne la boule fermée de centre* x *et de rayon* r*).*

(ii) Montrer l'égalité $\overline{B(x,r)} = B'(x,r)$ *dans tout espace normé.*

(iii) On considère $\mathbb{R}^2$ *muni de la distance* d_∞. *Soit* $E = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$. *On munit* E *de la distance restriction de* d_∞ *à* $E \times E$. *Déterminer la boule ouverte de* E *de centre* $(0,1)$ *et de rayon 1, son adhérence ainsi que la boule fermée de* E *de centre* $(0,1)$ *et de rayon 1.*

(iv) Conclure.

Corrigé

Exercice 2.4 *Soit* $E = l^2(\mathbb{N}) := \{(x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \infty\}$.

(i) Montrer que l'application $E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \to \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ est bien définie et que c'est un produit scalaire sur E.

(ii) Soit $F = \{x \in E : x_0 = 0\}$. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.

(iii) Déterminer $F^{\perp}$.

Corrigé

Exercice 2.5 *Soit E un espace préhilbertien, F une partie non vide de E.*

(i) Montrer que $F^{\perp}$ est une sous-espace vectoriel fermé de E.

(ii) Si $\langle F \rangle$ désigne l'espace vectoriel engendré par F. Montrer que $\overline{\langle F \rangle} \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

(iii) Déterminer $F \cap F^{\perp}$ dans le cas où F est un sous-espace vectoriel.

Corrigé

2.2 Corrigés des exercices

Exercice 2.1

(i) On a immédiatement

$$d(x + t, y + t) = ||(x + t) - (y + t)|| = ||x - y|| = d(x, y).$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda x - \lambda y|| = |\lambda|\, ||x - y|| = |\lambda|\, d(x, y).$$

(ii) Si l'on suppose qu'il existe une norme correspondant à cette distance (on a montré à l'Exercice 1.3 qu'il s'agit bien d'une distance) on devrait avoir, en particulier, que

$$d(0, \lambda y) = |\lambda| d(0, y).$$

Mais $d(0, \lambda y) \leqslant 1$, $d(0, y) > 0$ et $|\lambda| \to \infty$ et l'on obtient une contradiction.

Exercice 2.2

(i) Il nous faut montrer que $\lambda x + \beta y \in \overline{F}$, pour tout $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
Puisque $x \in \overline{F}$ il existe $(x_n) \subset F$ tel que $x_n \to x$. De même il existe $(y_n) \subset F$ tel que $y_n \to y$. On a $\lambda x_n + \beta y_n \in F$ car $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel et clairement aussi $\lambda x_n + \beta y_n \to \lambda x + \beta y$. D'où $\lambda x + \beta y \in \overline{F}$.

(ii) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in E \backslash F$. Soit $x_0 \in F^{\circ}$ un point intérieur de F. Il existe alors $B(x_0, 2r) \subset F$. Maintenant on peut écrire :

$$x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + \frac{||x - x_0||}{r} \frac{r(x - x_0)}{||x - x_0||}$$

ce qui montre que $x \in F$ puisque $x_0 \in F$, $\dfrac{||x - x_0||}{r} \dfrac{r(x - x_0)}{||x - x_0||} \in F$ et que F est un sous-espace vectoriel. Cette contradiction montre que l'on a bien que $F = E$.

Exercice 2.3

(i) Montrons que $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r)$. Si $y \in \overline{B(x,r)}$ alors $\exists (x_n) \subset B(x,r)$ tel que $x_n \to y$. On a alors

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,y).$$

Puisque $d(x,x_n) < r$ et que $d(x_n,y) \to 0$ il vient que $d(x,y) \leqslant r$ et donc que $y \in B'(x,r)$.

(ii) Montrons que dans un espace normé : $\overline{B(x,r)} = B'(x,r)$. Soit $y \in B'(x,r)$. On peut supposer que $||x-y|| = r$ (car bien sûr $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$). Il nous faut montrer que toute boule ouverte centrée en y rencontre $B(x,r)$. Soit $B(y,\delta)$ une telle boule. Considérons l'élément

$$y + \frac{\delta}{2r}(x-y).$$

Puisque $||\frac{\delta}{2r}(x-y)|| = \frac{\delta}{2}$ on a que $y + \frac{\delta}{2r}(x-y) \in B(y,\delta)$. Aussi

$$\begin{aligned} ||x - (y + \frac{\delta}{2r}(x-y))|| &= ||x(1 - \frac{\delta}{2r} - y(1 - \frac{\delta}{2r})|| \\ &= (1 - \frac{\delta}{2r})||x-y|| = (r - \frac{\delta}{2}) < r. \end{aligned}$$

et c'est ok.

(iii) On rappelle que $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$. Il vient alors (faire un dessin au besoin) que $B((0,1),1) = \{0\}\times]0,1]$, $\overline{B((0,1),1)} = \{0\} \times [0,1]$ et finalement que la boule fermée de E de centre $(0,1)$ et de rayon 1 est E.

(iv) En général on n'a pas $B'(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.

Exercice 2.4

(i) Montrons que l'application $E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $(x,y) \to \langle x,y\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ est bien définie. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i y_i| \leqslant \Big(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=0}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, comme $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ convergent par hypothèse, on a que $\sum_{i=0}^{n} x_i y_i$ est absolument convergente. Donc elle converge (voir cours de $L2$). Par suite l'application est bien définie. Clairement aussi elle est définie positive car

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 > 0$$

si $x \in E$ est non trivial. Les autres propriétés du produit scalaire sont évidentes. Notons que la norme associée à ce produit scalaire est

$$||x|| := \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} := \Big(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Le fait que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel est évident. Pour montrer que $F \subset E$ est fermé on va montrer que son complémentaire est ouvert. On a $C_E F = \{x \in E : x_0 \neq 0\}$. Soit $z \in C_E F$. Montrons que l'on peut trouver une boule $B(z,r) \subset C_E F$. On a

$$B(z,r) = \{y \in E : \sum_{i=1}^{\infty} (z_i - y_i)^2 < r^2\}.$$

En particulier donc si $y \in B(z,r)$ on a que $|z_0 - y_0|^2 < r^2$. Puisque $z_0 \neq 0$ en prenant, par exemple, $r = \frac{|z_0|}{2}$ on voit que $y_0 \neq 0$ pour tout $y \in B(z,r)$. On a donc bien montré que $C_E F$ est un ouvert.

(iii) Par définition $F^\perp$ est donné par $F^\perp = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F\}$. On a

$$\langle x, y\rangle = x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

On voit si x est tel que $x_i \neq 0$ pour un $i \geqslant 1$ alors en prenant $y = (0, \cdots, x_i, \cdots) \in F$ on a que $\langle x, y\rangle \neq 0$. Remarquons aussi que $(x_0, 0, \cdots, 0, \cdots) \in F^\perp$ pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{R}$. Par suite on a exactement que $F^\perp = (x_0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Exercice 2.5

(i) On rappelle que $F^\perp = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0\,, \forall y \in F\}$. La structure de sous-espace vectoriel est évidente (il suffit de vérifier que $\lambda x_1 + \beta x_2 \in F^\perp$ si $x_1, x_2 \in F^\perp, \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $F^\perp$ est fermé, c'est à dire que $C_E(F^\perp)$ est ouvert. Soit $x \in C_E(F^\perp)$. Montrons que l'on peut trouver une boule $B(x,r)$ entièrement contenue dans $C_E F^\perp$. Puisque $x \in C_E(F^\perp)$ il existe $y \in F$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

On peut décrire $B(x,r)$ comme l'ensemble des points de la forme $x + tz$ où $z \in E$ est tel que $||z|| = 1$ et où $t \in [0, 1[$. Alors

$$\langle x + tz, y\rangle = \langle x, y\rangle + t\langle z, y\rangle.$$

On a

$$|\langle z, y\rangle| \leqslant ||z||\,||y|| = ||y|| = \text{constante}.$$

Donc, en prenant $t > 0$ suffisamment petit, puisque $\langle x, y\rangle \neq 0$, on s'assure alors que

$$\langle x + tz, y\rangle \neq 0.$$

Cela prouve que $B(x,r) \subset C_E(F^\perp)$.

(ii) On vérifie facilement que $\langle F\rangle \subset (F^\perp)^\perp$. Puisque $(F^\perp)^\perp$ est fermé il vient alors que $\overline{\langle F\rangle} \subset (F^\perp)^\perp$.

(iii) Soit $x \in F \cap F^\perp$. Comme $x \in F^\perp = 0$ on a que $\langle x, y\rangle$ pour tout $y \in F$. D'où en particulier en prenant $y = x \in F$ il vient que $\langle x, x\rangle = 0$ c'est à dire que $x = 0$.

Chapitre 3

Série 3

3.1 Enoncés des exercices

Exercice 3.1 *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) f est continue.

ii) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.

iii) Pour tout $B \subset F$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Corrigé

Exercice 3.2 *Soit (E,d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On veut montrer que f est continue sur E si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $F_\lambda = \{x \in E : f(x) < \lambda\}$ et $G_\lambda = \{x \in E : f(x) > \lambda\}$ sont ouverts.*

(i) Montrer l'implication directe.

(ii) Montrer que l'image inverse d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de E.

(iii) Conclure.

Corrigé

Exercice 3.3 *On considère l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain indice (dépendant de la suite). Montrer que cet espace est dense dans $l^p(\mathbb{N})$ pour $1 \leqslant p < \infty$ mais pas dans $l^\infty(\mathbb{N})$ (l'ensemble des suites bornées muni de la norme $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$).*

Corrigé

Exercice 3.4 *Soit (E,d) un espace métrique et $f : (E,d) \to (E,d)$ un homéomorphisme. Montrer qu'alors*

$$\delta : (x,y) \in E \times E \to \delta(x,y) = d(f(x), f(y))$$

est une distance topologiquement équivalente à d.

Corrigé

Exercice 3.5 *Soient $(E,d),(F,\delta)$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application.*

(i) Montrer que si f est continue le graphe $G(f)$ de f est fermé dans $E \times F$.

(ii) Montrer que le graphe peut être fermé sans que f soit continue.

(iii) En étudiant l'application g de E sur $G(f)$ définie par $g(x) = (x, f(x))$, montrer que si f est continue alors E et $G(f)$ sont homéomorphes.

Corrigé

Exercice 3.6 *Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que d est une application uniformément continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$.*

Corrigé

Exercice 3.7 *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application continue. On pose*

$$d_f(x,y) = d(x,y) + d'(f(x), f(y)).$$

(i) Justifier que d_f est une distance sur E.

(ii) Montrer que d_f est uniformément équivalente à d si et seulement si f est uniformément continue.

Corrigé

Exercice 3.8 *Soit $E = P([0,+\infty[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des polynômes à variable réelle et à coefficients réels. On définit sur E une norme en posant, si $p \in E$,*

$$||p|| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|.$$

(i) Justifier que $p \to ||p||$ est bien une norme.

(ii) Soit $a \geqslant 0$ et L_a la forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par $L_a(P) = p(a)$. Montrer que L_a est continue ssi $a \in [0,1]$ et lorsque c'est le cas déterminer sa norme.

(iii) Soient $0 \leqslant \alpha < \beta$. On définit $\phi_{\alpha\beta} : E \to \mathbb{R}$ en posant

$$\phi_{\alpha\beta}(p) = \int_\alpha^\beta p(x)\,dx.$$

Trouver une condition sur α et β nécessaire et suffisante pour que cette forme linéaire soit continue et lorsque c'est le cas déterminer sa norme.

Corrigé

Exercice 3.9 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $p(0) = 0$.*

(i) Montrer que $N : p \to ||p'||_\infty$ est une norme sur E, telle que $\forall p \in E$, $||p||_\infty \leqslant N(p)$.

(ii) Montrer que l'application de $E \to \mathbb{R}$, $L(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{p(x)}{x}\,dx$ est bien définie et définit une application linéaire, continue pour la norme N, de norme 1.

(iii) *Soit* $(p_n)_{n\geqslant 1}$, *la suite de* E *définie par* $p_n(x) = 1-(1-x)^n$. *Montrer que* $\forall n \geqslant 1$, $L(p_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

(iv) *Conclure sur la continuité de* L *lorsque* E *est muni de la norme* $||.||_\infty$.

Corrigé

Exercice 3.10 *On rappelle que* l_2 *est l'ensemble des suites réelles telles que*

$$||x||_{l_2}^2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \text{ avec } x = (x_n)_{n\geqslant 1}.$$

On note l_2' *le dual topologique de* l_2. *Pour tout* $y = (y_n)_{n\geqslant 1} \in l_2$ *on définit l'application*

$$\phi_y : l_2 \to \mathbb{R},\ x = (x_n)_{n\geqslant 1} \to \sum_{n\geqslant 1}^{\infty} x_n y_n.$$

(i) *Montrer que* ϕ_y *est une forme linéaire continue et que* $||\phi_y||_{l_2'} \leqslant ||y||_{l_2}$.

(ii) *Montrer que* $||\phi_y||_{l_2'} \geqslant ||y||_{l_2}$ *et en déduire que l'application* Φ *avec* $\Phi : y \in l_2 \to \Phi_y \in l_2'$ *est une isométrie.*

Corrigé

Exercice 3.11 *Soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $||f||_\infty$ *et* $F = C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $||f||_1$.

(i) *Montrer que l'application* $u : E \times E \to \mathbb{R}$, $u(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ *est bilinéaire et continue.*

(ii) *Montrer que l'application* $V : E\times E \to E$, $V(f,g)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)dt$ *est bilinéaire et continue.*

(iii) *On note* $V(f,g)$ *par* $f*g$ *et on l'appelle la convolution de* f *et* g. *Montrer que* $f*g$ *est commutative.*

(iv) *Montrer que* $(f,g) \to f*g$ *appartient aussi à* $\mathcal{L}(F,F;F)$.

(v) *Soit* $\Phi : F\times F \to E$ *définie par* $\Phi(f,g) = f*g$. *Montrer la continuité des applications partielles*

$$\Phi_f : g \in F \to f*g \in E \text{ et } \Phi_g : f \in F \to f*g \in E.$$

(vi) *En étudiant* $\Phi(f_n,g_n)$ *avec* $f_n(x) = x^n$ *et* $g_n(x) = (1-x)^n$ *montrer que* Φ *n'est pas continue.*

Corrigé

3.2 Corrigés des exercices

Exercice 3.1

(i) Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Clairement pour tout $A \subset F$ il vient que

$$f^{-1}(C_F A) = C_E\Big[f^{-1}(A)\Big].$$

Par suite si $B \subset F$ est fermé on a

$$C_E\Big[f^{-1}(B)\Big] = f^{-1}(C_F B).$$

Puisque $C_F B$ est un ouvert et que f est continue $f^{-1}(C_F B)$ est un ouvert. Il vient donc que $f^{-1}(B)$ est fermé. Cet argument montre aussi que $(ii) \Longrightarrow (i)$.

(ii) Montrons que $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Par (ii) $f^{-1}(\overline{B})$ est un fermé de E. De plus il contient $f^{-1}(B)$. D'où

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

(iii) Montrons que $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Si $B \subset F$ est fermé alors, par (iii), on a directement que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. Par suite nécessairement $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ et $f^{-1}(B)$ est fermée.

Exercice 3.2

(i) Supposons que f soit continue et montrons que F_λ, G_λ sont ouverts. C'est évident en fait, il suffit de remarquer que $F_\lambda = f^{-1}(\,]-\infty, \lambda[)$ et que $G_\lambda = f^{-1}(\,]-\infty, \lambda[)$.

(ii) Soit $]\lambda, \mu[$ un intervalle ouvert. On a

$$f^{-1}(\,]\lambda, \mu[\,) = f^{-1}(\,]-\infty, \mu[\,) \cap f^{-1}(]\lambda, +\infty\,[))$$

qui est ouvert par hypothèse et comme réunion de deux ouverts.

(iii) Tout ouvert U de $\mathbb{R}$ est une réunion d'une famille $(]\,\lambda_i, \mu_i[\,), i \in I)$ d'intervalles ouverts. On a

$$f^{-1}(U) = \cup_{i \in I} f^{-1}(\,]\lambda_i, \mu_i[\,).$$

Donc $f^{-1}(U)$ est ouvert puisque réunion d'une famille d'ouverts.

Exercice 3.3

Pour montrer que l'espace des suites nulles à partir d'une certain indice, notons le C_τ, est dense dans $l^p(\mathbb{N})$ il suffit de montrer que pour tout $x \in l^p(\mathbb{N})$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on arrive à trouver un élément de C_τ situé à une distance inférieure à $\varepsilon > 0$ de x. Mais puisque $x \in l^p(\mathbb{N})$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant \varepsilon.$$

Donc en prenant

$$y = \begin{cases} x_i \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant N_\varepsilon \\ 0 \text{ si } i \geqslant N_\varepsilon + 1. \end{cases}$$

on a bien trouvé un élément de C_τ comme cherché car

$$||x-y||_p^p = \sum_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant \varepsilon^p.$$

Maintenant soit $x = (1, 1, \cdots, 1, \cdots) \in L^\infty$ Pour tout élément $y \in C_\tau$ on a que $||x-y||_\infty = 1$ et donc C_τ n'est pas dense dans $l^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 3.4

On sait déjà que δ et une semi-distance (voir l'Exercice 1.5) Comme $\delta(x,y) = 0 \iff d(f(x), f(y)) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff x = y$ c'est donc une distance. Pour prouver que d et δ sont topologiquement équivalentes on va utiliser le fait que deux distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si (E, d_1) et (E, d_2) ont les mêmes suites convergentes (voir l'Exercice 1.9).

Soit $x_n \to x$ dans (E, d) (i.e. $d(x_n, x) \to 0$) alors, par continuité de f, $f(x_n) \to f(x)$ dans (E, d). Autrement dit $\delta(x_n, x) = d(f(x_n), f(x)) \to 0$. Réciproquement si $\delta(x_n, x) \to 0$ i.e. $f(x_n) \to f(x)$ dans (E, d) on a, par continuité de f^{-1}, $x_n \to x$ dans (E, d).

Exercice 3.5

On rappelle que $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\}$.

(i) Pour montrer que $G(f)$ est fermé considérons une suite $\big((x_n, y_n)\big) \subset G(f)$ telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Il nous faut montrer que $(x, y) \in G(f)$ c'est à dire que $y = f(x)$. Mais $x_n \to x$ et donc, par continuité de f, $y_n = f(x_n) \to f(x)$. D'où $y = f(x)$.

(ii) Il suffit de considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement f n'est pas continue et pourtant, puisque

$$G(f) = \{(x, y) : xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

on a que $G(f)$ est fermé. En effet $\{(x, y) : xy = 1\}$ est l'image réciproque de 1 par l'application $(x, y) \to xy$ qui est continue.

(iii) Clairement $g(E) = G(f)$. De plus g est continue car ses deux composantes le sont. Maintenant g^{-1} existe, c'est la projection sur la première composante p_1. Comme $p_1 : G(f) \to E$ est continue il vient que g^{-1} est continue. C'est donc un homéomorphisme. Par suite E et $G(f)$ sont homéomorphes.

Exercice 3.6

On choisit sur $E \times E$ la distance $d_{E\times E}$ donnée par

$$d_{E\times E}\big((x, y), (x', y')\big) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}.$$

On sait, par la Définition 1.6.2, que ce choix particulier n'aura pas d'influence sur le résultat. Il nous faut montrer que $\forall\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_{E\times E}\Big((x,y),(x',y')\Big) \leqslant \delta \Longrightarrow \Big|d(x,y) - d(x',y')\Big| \leqslant \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} d(x,y) - d(x',y') &\leqslant d(x,x') + d(x',y) - d(x',y') \\ &\leqslant d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) - d(x',y') \\ &= d(x,x') + d(y',y) \leqslant 2d_{E\times E}\big((x,y),(x',y')\big). \end{aligned}$$

De même on a que

$$d(x',y') - d(x,y) \leqslant d(x',x) + d(y,y') \leqslant 2d_{E\times E}\big((x,y),(x',y')\big)$$

et l'on conclut.

Exercice 3.7

(i) On vérifie que $d_f(x,y) = 0 \Longrightarrow d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$. L'inégalité triangulaire est évidente.

(ii) On sait par le cours que d et d_f sont uniformément équivalentes si et seulement si $i : (E,d) \to (E,d_f)$ est uniformément continue ainsi que son inverse (voir la Définition 3.3.4). Montrons tout d'abord que si f est uniformément continue alors d et d_f sont uniformément équivalentes. Montrer que i est uniformément continue revient à montrer que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0 \text{ tel que } d(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow d_f(x,y) \leqslant \varepsilon.$$

Mais, f étant uniformément continue, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha > 0$ tel que

$$d(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut aussi supposer, sans perte de généralité, que $\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'où

$$d(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow d_f(x,y) \leqslant \varepsilon.$$

Aussi on a trivialement que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 \text{ tel que } d_f(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow d(x,y) \leqslant \varepsilon$$

pour $\alpha = \varepsilon$ et donc l'inverse de $i : (E,d) \to (E,d_f)$ est uniformément continue. Réciproquement montrons que si f n'est pas uniformément continue alors d et d_f ne sont pas uniformément équivalentes. Par hypothèse il existe alors $\varepsilon > 0$ et $\Big((x_n,y_n)\Big) \subset E\times E$ tels que

$$d(x_n,y_n) \to 0 \ \text{ mais } \ d'(f(x_n),f(y_n)) \geqslant \varepsilon.$$

Par suite il existe $\varepsilon > 0$ et $(x_n,y_n) \subset E\times E$ tels que

$$d(x_n,y_n) \to 0 \text{ et } d_f(x_n,y_n) \geqslant \varepsilon.$$

D'où d et d_f ne sont pas uniformément équivalentes.

Exercice 3.8

(i) Puisque $p \equiv 0$ sur $[0,1]$ alors $p \equiv 0$ sur $[0,+\infty[$ (en effet un polynôme qui a une infinité de zéro est identiquement nul). Les autres propriétés définissant une norme sont évidentes.

(ii) Supposons que $a \in [0,1]$. On a

$$|p(a)| \leqslant \max_{x\in[0,1]} |p(x)| = ||p||$$

et donc L_a est continue. On rappelle que

$$||L_a|| = \sup_{p\in E, p\neq 0} \frac{L_a(p)}{||p||}.$$

Comme on a toujours que $|L_a(a)| = |p(a)| \leqslant ||p||$ nécessairement $||L_a|| \leqslant 1$. Maintenant en prenant le polynôme $p_0(x) \equiv 1$ il vient que $|p_0(a)| = 1$ et que $||p_0|| = \max_{x\in[0,1]} p(x) = 1$. D'où, par définition du supremum,

$$||L_a|| \geqslant \frac{|L_a(p_0)|}{||p_0||} = 1.$$

Comme on sait déjà que $||L_a|| \leqslant 1$ nécessairement $||L_a|| = 1$. Montrons maintenant que si $a \notin [0,1]$ alors L_a n'est pas continue. Il suffit pour cela de construire une suite $(p_n) \subset E$ telle que $|p_n(a)| \to \infty$ et telle que $(||p_n||)$ reste bornée. Considérons pour cela $p_n(x) = x^n$. Sur $[0,1]$ on a toujours $\max_{x\in[0,1]} |p_n(x)| \leqslant 1$ mais $|p_n(a)| \to \infty$.

(iii) Supposons que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Alors on a que

$$\Big|\int_\alpha^\beta P(x)dx\Big| \leqslant |\beta-\alpha| \max_{x\in[0,1]} |P(x)| = (\beta-\alpha)||p||.$$

Par suite $\phi_{\alpha\beta}$ est bien continue et en prenant $p(x) \equiv 1$ il vient aussi directement que $||\phi_{\alpha\beta}|| = \beta - \alpha$.

Supposons maintenant que $\beta > 1$ et montrons que l'on peut avoir

$$\int_\alpha^\beta p(x)dx \to +\infty \quad \text{avec } ||p|| \leqslant 1.$$

On reprend pour cela la famille $p_n(x) = x^n$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta x^n dx &= \frac{1}{n+1}[\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}] \\ &= \frac{1}{n+1}(\beta-\alpha)(\beta^n + \beta^{n-1}\alpha + \cdots + \alpha^n) \\ &\geqslant (\beta-\alpha)\frac{\beta^n}{n+1} \to +\infty \text{ si } n \to \infty.\end{aligned}$$

Comme auparavant, $||p_n|| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.9

(i) Montrons que N est une norme.
  (i) Si $||p'||_\infty = 0$ comme

$$p(x) = p(0) + \int_0^x p'(t)dt = \int_0^x p'(t)dt$$

  on a que $p(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$. Réciproquement si $p \equiv 0$ on a $||p'||_\infty = 0$.
  (ii) Le fait que $||(\lambda p)'||_\infty = |\lambda|\,||p'||_\infty$ est évident.
  (iii) $||p_1' + p_2'||_\infty \leqslant ||p_1'||_\infty + ||p_2'||_\infty$ est évident.

Maintenant puisque $|p(x)| = \Big|\int_0^x p'(t)dt\Big| \leqslant ||p'||_\infty$, $\forall x \in [0,1]$, on a que $||p||_\infty \leqslant N(p)$.

(ii) Puisque

$$L(p) = \int_0^1 \Big[\frac{1}{x}\int_0^x p'(t)dt\Big]dx$$

et que

$$x \to \frac{1}{x}\int_0^x p'(t)dt$$

est continue sur $[0,1]$, $L(p)$ est bien définie. La linéarité de L est évidente. Maintenant, d'une part

$$|L(p)| \leqslant \Big|\Big|\frac{1}{x}\int_0^x p'(t)dt\Big|\Big|_\infty \leqslant ||p'||_\infty.$$

D'où $||L|| \leqslant 1$. D'autre part, on a pour $p(x) = x$, $L(x) = \int_0^1 \frac{x}{x} = 1$. D'où $||L|| \geqslant 1$. Finalement donc $||L|| = 1$.

(iii) On fait le changement de variable $y = 1 - x$. Il vient alors

$$p_n(x) = p_n(1-y) = 1 - [1-(1-y)]^n = 1 - y^n.$$

D'où

$$L(p_n) = \int_0^1 \frac{1-y^n}{1-y}(-dy) = \int_0^1 \frac{1-y^n}{1-y}dy = \int_0^1 [1 + y + \cdots + y^{n-1}]dy$$
$$= [y + \frac{1}{2}y + \cdots + \frac{1}{n}y^{n-1}]_0^1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

(iv) Puisque $||p_n||_\infty = 1$, $\forall n \geqslant 1$ et que $|L(p_n)| \to \infty$ on en déduit que L n'est pas continue.

Exercice 3.10

(i) La linéarité est évidente. On a aussi

$$|\phi_y(x)| = \Big|\sum_{i=1}^\infty x_n y_n\Big| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^\infty x_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=1}^\infty y_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} = ||x||_{l_2}||y||_{l_2}$$

d'où $||\phi_y||_{l_2'} \leqslant ||y||_{l_2}$.

(ii) Il suffit de “tester” ϕ_y avec $x = y$. Il vient

$$\phi_y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 = ||y||_{l_2}^2.$$

D'où $||\phi_y||_{l_2'} \geqslant ||y||_{l_2}$. En utilisant le Point (i) on conclut alors que $||\phi_y||_{l_2'} = ||y||_{l_2}$ et dont $\Phi : y \in l_2 \to \phi_y \in l_2'$ est bien une isométrie.

Exercice 3.11

(i) Il est évident de vérifier la linéarité par rapport à chacune des variables. Maintenant

$$\Big| \int_0^1 f(x)g(x)dx| \leqslant ||f||_\infty ||g||_\infty$$

et donc $u : E \times E \to \mathbb{R}$ est bien continue.

(ii) La preuve est identique à celle du Point (i).

(iii) En faisant le changement de variable $s = x - t$ il vient

$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_x^0 f(x-s)g(s)(-ds) = \int_0^x f(x-s)g(s)ds.$$

Donc le produit de convolution est bien commutatif.

(iv) La bilinéarité est claire. Maintenant en changeant l'ordre d'intégration

$$\int_0^1 \Big| \int_0^x |f(t)g(x-t)|dt \Big| dx = \int_0^1 dt \Big[\int_t^1 f(t)g(x-t)dx \Big] = \int_0^1 f(t) \Big[\int_t^1 g(x-t)dx \Big] dt.$$

Mais

$$\Big| \int_t^1 g(x-t)dx \Big| \leqslant \int_t^1 |g(x-t)|dx \leqslant \int_0^1 |g(x)|dx = ||g||_1.$$

Aussi

$$\int_0^1 f(t)dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|dt = ||f||_1.$$

Finalement il vient

$$||f * g||_1 \leqslant ||f||_1 \, ||g||_1$$

et donc $(f, g) \to f * g$ appartient aussi à $\mathcal{L}(F, F; F)$.

(v) Pour $f \in E$ fixé on a

$$\Big| \int_0^x f(t)g(x-t)dt \Big| \leqslant ||f||_\infty \int_0^x |g(x-t)|dt \leqslant ||g||_1.$$

De même il vient, en fixant $g \in E$ que

$$\Big| \int_0^x f(t)g(x-t)dt \Big| \leqslant ||g||_\infty ||f||_1.$$

Donc les deux applications partielles sont bien continues.

(vi) On a

$$||f_n||_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

$$||g_n||_1 = \int_0^1 (1-x)^n dx = \int_1^0 y^n(-dx) = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$$

et, en faisant le choix particulier $x = 1$,

$$\max_{x\in[0,1]} \int_0^x t^n \Big[1-(x-t)\Big]^n dt \geqslant \int_0^1 t^n t^n dt = \frac{1}{2n+1}.$$

Maintenant on a

$$\frac{\Phi(f_n, g_n)}{||f_n||_1 ||g_n||_1} = \frac{(n+1)^2}{2n+1} \to \infty$$

et donc Φ n'est pas continue (car elle est non bornée).

Chapitre 4

Série 4

4.1 Enoncés des exercices

Exercice 4.1 *Soient E un espace vectoriel normé, $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, X une partie de E telle que*

$$(x, y) \in X^2, \quad x \neq y \implies ||x - y|| \geqslant \alpha$$

Montrer que X est une partie complète de E.

Corrigé

Exercice 4.2 *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $(E, ||\cdot||)$ et soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| \leqslant M$.*

Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n}{M}\right)$ est une suite de Cauchy dans la boule unité fermée. En déduire, que $(E, ||\cdot||)$ est complet si et seulement si la boule unité fermée est complète.

Corrigé

Exercice 4.3 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application isométrique (i.e. telle que $d'(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall (x, y) \in E \times E$). Montrer que l'image par f d'une partie complète de E est fermée dans E'.*

Corrigé

Exercice 4.4 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On suppose que toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans E. Montrer que $\overline{A}$ est complet.*

Corrigé

Exercice 4.5 *Soit (E, d) un espace métrique. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E, non convergente.*

(i) Montrer que pour tout $x \in E$ la suite $(d(x, x_n)) \subset \mathbb{R}$ est convergente vers un nombre $g(x) > 0$.

(ii) Montrer que l'application $x \to \dfrac{1}{g(x)}$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.

(iii) Montrer que l'application $x \to \dfrac{1}{g(x)}$ *n'est pas bornée.*

Corrigé

Exercice 4.6 *Soit* (E, d) *un espace vectoriel métrique. Pour toute partie non vide* $A \subset E$ *et pour tout point* $x \in E$ *on définit la distance de* x *à* A *par*

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z).$$

(i) Montrer que $x \in \overline{A}$ *si et seulement si* $d(x, A) = 0$.

(ii) En supposant que $x \in E$ *et* $y \in E$ *montrer que*

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A).$$

En déduire que $x \in E \to d(x, A)$ *est Lipchitzienne de constante 1 sur* E.

Corrigé

Exercice 4.7 *Soit* $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une application continue et telle que, pour tout* $x > 0$ $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$. *Le but de l'exercice est de montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. *On introduit pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_n(\varepsilon) = \{x > 0 \text{ tel que } \forall p \geqslant n, |f(px)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ *et* $0 < a < b$ *tels que* $]a, b[\subset F_N(\varepsilon)$.

(ii) Conclure.

Corrigé

Exercice 4.8 *Montrer qu'un espace métrique* E *est complet si et seulement si toute suite* $(u_n)_n$ *dans* E *telle que* $d(u_n, u_{n+1}) \leqslant 2^{-n}, n \in \mathbb{N}$ *converge.*

Corrigé

Exercice 4.9 *Soit* E *un espace vectoriel normé. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.*

1) E est complet.

2) Tout série normalement convergente dans E est convergente.

Corrigé

4.2 Corrigés des exercices

Exercice 4.1

Soit $(u_n) \subset E$ une suite de Cauchy, alors pour $n, m \in \mathbb{N}$ assez grand on a

$$||u_n - u_m|| \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

D'où nécessairement $(u_n) \subset E$ est constante à partir d'un certain indice. D'où $(u_n) \subset E$ converge.

Exercice 4.2

Soit $(x_n) \subset (E, ||\cdot||)$ une suite de Cauchy telle que $||x_n|| \leqslant M$. On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$||x_n - x_m|| \leqslant \varepsilon M, \quad \forall n, m \geqslant n_0.$$

Donc il vient immédiatement que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\left|\frac{x_n}{M} - \frac{x_m}{M}\right|\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc la suite $(\frac{x_n}{M})$ est bien de Cauchy dans la boule unité fermée.

Si $(E, ||\cdot||)$ est complet alors $\overline{B(0,1)}$ est complète (car elle est fermée). Si $\overline{B(0,1)}$ est complète montrons que $(E, ||\cdot||)$ est complet. Soit $(x_n) \subset (E, ||\cdot||)$ une suite de Cauchy, on sait que toute suite de Cauchy est bornée et donc par ce qui précède il existe $M > 0$ telle que

$$\left(\frac{x_n}{M}\right) \text{ est de Cauchy dans } \overline{B(0,1)}.$$

Donc, par hypothèse, elle converge dans $\overline{B(0,1)}$, c'est à dire que pour un $y \in \overline{B(0,1)}$ on a $\dfrac{x_n}{M} \to y$. Maintenant il est facile de voir que $x_n \to My \in E$.

Exercice 4.3

Soit $A \subset E$ une partie complète. Pour montrer que $f(A) \subset E'$ est fermée il faut montrer que pour toute suite $(y_n) \subset f(A)$ telle que $y_n \to y$ il existe $\exists x \in A$ tel que $f(x) = y$. Puisque $(y_n) \subset f(A)$, $\exists (x_n) \subset A$ tel que $f(x_n) = y_n$. Maintenant $(y_n) \subset A$ est de Cauchy (puisqu'elle converge) et f est une isométrie. Par suite $(x_n) \subset A$ est aussi de Cauchy. Donc, puisque A est complet, $x_n \to x \in A$. Finalement, par la continuité de f (évidente car f est une isométrie), il vient que $f(x_n) \to f(x)$. Par l'unicité de la limite on déduit que $y = f(x)$.

Exercice 4.4

Soit $(x_n) \subset \overline{A}$ une suite de Cauchy. Il nous faut montrer que (x_n) converge dans $\overline{A}$. Par définition de $\overline{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, il existe $y_n \in A$ tel que $\mathrm{d}(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Montrons que $(y_n) \subset A$ est de Cauchy. On peut écrire, $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$|y_n - y_m| \leqslant |y_n - x_n + x_n - x_m + x_m - y_m| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - y_m|.$$

On a $|y_n - x_n| \to 0$ et $|x_m - y_m| \to 0$ par construction. Aussi $|x_n - x_m| \to 0$ car (x_n) est de Cauchy. Par suite $(y_n) \subset A$ est bien une suite de Cauchy et donc, par hypothèse, on a $y_n \to y$. Montrons que $x_n \to y$. On a

$$|y - x_n| = |y - y_n + y_n - x_n| \leqslant |y - y_m| + |y_n - x_m|.$$

Avec $|y - y_n| \to 0$ car $y_n \to y$ et $|y_n - x_n| \to 0$ par construction. D'où $x_n \to y$ et comme $(y_n) \subset A$ il vient que $y \in \overline{A}$.

Exercice 4.5

(i) On va montrer que $(d(x,x_n)) \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy. On a

$$d(x,x_n) \leqslant d(x,x_m) + d(x_m,x_n).$$

D'où

$$d(x,x_n) - d(x,x_m) \leqslant d(x_m,x_n)$$

et en échangeant le rôle de n et m on a globalement

$$\Big| d(x,x_n) - d(x,x_m) \Big| \leqslant d(x_n,x_m).$$

Par suite $(d(x,x_n))$ est bien de Cauchy et donc elle converge vers un $g(x) \in \mathbb{R}$. Maintenant si $g(x) = 0$ alors $d(x,x_n) \to 0$, c'est à dire que $x_n \to x$ et donc que (x_n) est convergente contrairement à l'hypothèse. Donc $g(x) > 0$.

(ii) Puisque $g(x) \neq 0$, $\forall x \in E$ il suffit de montrer que $x \to g(x)$ est continue. Soit $(y_m) \subset E$ tel que $y_m \to y$. Montrons qu'alors $g(y_m) \to g(y)$. On peut écrire, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\Big| d(x_n,y_m) - d(x_n,y) \Big| \leqslant d(y,y_m).$$

En posant à la limite $n \to \infty$, pour $m \in \mathbb{N}$ fixé il vient

$$|g(y_m) - g(y)| \leqslant d(y,y_m).$$

En passant à la limite $m \to \infty$ il vient alors, puisque $d(y,y_m) \to 0$, que $g(y_m) \to g(y)$.

(iii) Dire que $\frac{1}{g(x)}$ est bornée c'est dire que

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } g(y) \geqslant \alpha, \ \forall y \in E.$$

Mais puisque $(x_n) \subset E$ est une suite de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_{n_0},x_n) \leqslant \frac{\alpha}{2}, \ \forall n \geqslant n_0.$$

En prenant $y = x_{n_0}$ on a $d(y,x_n) \to g(y)$ d'où nécessairement $g(y) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ ce qui est une contradiction.

Exercice 4.6

(i) Si $x \in \overline{A}$ il existe $(x_n) \subset A$ tel que $d(x_n,x) \to A$. D'où $0 \leqslant d(x,A) \leqslant d(x,x_n) \to 0$ et donc $d(x,A) = 0$. Inversément si $d(x,A) = 0$, $\exists (x_n) \subset A$ tel que $d(x,x_n) \to 0$. D'où $x \in \overline{A}$.

(ii) On peut écrire pour tout $z \in A$,

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

Il existe $(z_n) \subset A$ tel que $d(y,z_n) \to d(y,A)$ et on a clairement que $d(x,z_n) \geqslant d(x,A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où

$$d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,A).$$

Il vient alors que

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y).$$

En échangeant les rôles de x et y il vient que

$$\Big| d(x, A) - d(y, A) \Big| \leqslant d(x, y)$$

c'est à dire que $x \to d(x, A)$ est lipchitzienne de constante 1.

Exercice 4.7

(i) Montrons tout d'abord que chaque $F_n(\varepsilon)$ est fermé. On a

$$F_n(\varepsilon) = \cap_{p \geqslant n} \{x : |f(px)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Comme $x \to f(px)$ est continue alors chacun des ensembles, pour $p \geqslant n$ fixé,

$$\{x : |f(px)| \leqslant \varepsilon\}$$

est fermé et donc $F_n(\varepsilon)$ est fermé. Maintenant, $\forall x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|f(nx)| \leqslant \varepsilon$. Par suite $x \in F_{n_0}(\varepsilon)$. Il vient donc que

$$]0, +\infty[= \cup_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon).$$

Par suite, en appliquant le Corollaire 4.3.7 du Lemme de Baire, il vient que

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } F_N(\varepsilon)^\circ \neq \emptyset.$$

Par suite $\exists N \in \mathbb{N}$ et $]a, b[\subset]0, \infty[$ tel que $]a, b[\subset F_N(\varepsilon)$, c'est à dire que

$$\forall x \in]a, b[, \; \forall p \geqslant N, \; |f(px)| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) L'idée est ici de montrer que les intervalles $](n-1)a, (n-1b[$, $]na, nb[$ se chevauchent pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. On recouvre alors toute la droite pour $x > 0$ assez grand. Pour cela il suffit de montrer que $(n-1)b > na$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. On a $(n-1)b > na \iff n > \frac{b}{b-a}$. Par suite, pour $M = [\frac{b}{b+a}] + 1$ on a que $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, $\forall x \geqslant Ma$. D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 4.8

Montrons l'implication directe. Pour cela il convient de montrer que les suites $(u_n) \subset E$ telles que $d(u_n, u_{n+1}) \leqslant 2^{-n}$ sont de Cauchy. On peut écrire, pour tout $m \geqslant n$,

$$\begin{aligned}
d(u_m, u_n) &\leqslant d(u_m, u_{m-1}) + \cdots + d(u_{n+1}, u_n) \\
&\leqslant \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n}\Big[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\Big] \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

et donc $(u_n) \subset E$ est bien de Cauchy.

Montrons maintenant l'implication inverse. Pour cela on considère une suite de Cauchy et on montre qu'elle converge. On va utiliser le fait qu'une suite de Cauchy qui contient une sous-suite convergente est convergente. Montrons donc que si $(u_n) \subset E$ est une suite de Cauchy on peut trouver une sous-suite, notée (u_{n_k}) telle que $d(u_{n_{k+1},u_{n_k}}) \leqslant 2^{-k}$. Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ telle que $d(u_p, u_q) \leqslant \frac{1}{2}$ si $p, q \leqslant n_1$. On définit par récurrence n_{k+1} comme le plus petit des entiers strictement plus grand que $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_p, u_q) \leqslant 2^{-(k+1)}$ si $p, q \geqslant n_{k+1}$, la sous-suite ainsi construite répond à la question.

Exercice 4.9

L'implication directe à déjà été vu au cours, voir le Théorème 4.4.3. Montrons l'implication inverse. Soit $(x_n) \subset E$ une suite de Cauchy. D'après la correction de l'Exercice 4.8 il existe une sous-suite telle que $||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|| \leqslant 2^{-k}$, $\forall k \geqslant 1$. On vérifie facilement que la série de terme général $z_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ est normalement convergente, donc convergente. On note z sa somme. Mais

$$x_{n_k} - x_1 = (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \cdots + (x_2 - x_1) = z_{k-1} + z_{k-2} + \cdots + z_1 \to z.$$

D'où $x_{n_k} \to z + x_1$. Puisque $(x_{n_k}) \subset E$ est convergente on en déduit que (x_n) elle même converge et donc que E est complet.

Chapitre 5

Série 5

5.1 Enoncés des exercices

Exercice 5.1 *Soit* (E,d) *un espace métrique et* $A \subset E$*. Montrer que* (A,d) *est compact si et seulement si* $\forall\,(O_i)_{i\in I}$ *telle que* $A \subset \cup_{i\in I} O_i$ *où les* O_i *sont des ouverts de* E *il existe* $I_0 \subset I$ *finie telle que* $A \subset \cup_{i\in I_0} O_i$*.*

Corrigé

Exercice 5.2 *Soit* (E,d) *un espace métrique. Soit* $(x_n) \subset E$ *une suite qui converge vers un* $x \in E$*. Montrer que l'ensemble* $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ *et un compact de* E*.*

Corrigé

Exercice 5.3 *Soit* K *une partie compacte non vide d'un espace métrique* (E,d)*.*

(i) Montrer que $\forall x \in E, \exists y \in K$ *tel que*

$$d(x,y) = \inf_{z\in K} d(x,z) \equiv d(x,K).$$

(ii) Soit U *une partie ouverte de* E *contenant* K*. Montrer qu'il existe* $r > 0$ *tel que* $\forall x \in E$ *on a l'implication*

$$d(x,K) < r \Rightarrow x \in U$$

(indication : raisonner par l'absurde).

Corrigé

Exercice 5.4 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que $\exists \alpha > 0$ *tel que* $f(x) \geqslant \alpha$*,* $\forall x \in [0,1]$.

(ii) Est-ce encore le cas si $x \in \mathbb{R}$ *?*

Corrigé

Exercice 5.5 *Soit (E,d) un espace métrique, (F,δ) un espace métrique compact.*

(i) Montrer que si le graphe de f est fermé dans $E\times F$ muni de la distance produit alors f est continue de (E,d) dans (F,δ).

(ii) Considérer la situation $(E,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$, $(F,\delta)=(\mathbb{R},|\cdot|)$ et $f:E\to F$ définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ et discuter la nécessité de l'hypothèse que (F,δ) soit un espace métrique compact.

Corrigé

Exercice 5.6 *Montrer que tout les e.v.n de dimension finie sont complets (on admet que $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est complet).*

Corrigé

Exercice 5.7 *Soit $(E,<\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert. Soit $F\subset E$ un sous espace fermé distinct de E. On admettra qu'il existe $x\in E$ tel que $||x||=1$ et $d(x,F)=1$ (ici $||\cdot||$ et d sont la norme et la distance associées à $<\cdot,\cdot>$).*

(i) Montrer que si E est de dimension infinie alors on peut construire une suite (x_n) de E telle
que $||x_n-x_m||\geqslant 1, \forall n\neq m\in\mathbb{N}$.

(ii) En déduire que si la boule unité fermée de $(E,<\cdot,\cdot>)$ est compacte alors nécessairement E est de dimension finie.

Corrigé

5.2 Corrigés des exercices

Exercice 5.1

Soit $(O_i)_{i\in I}$ tel que $A\subset\cup_{i\in I}O_i$. Alors

$$A=\Big(\cup_{i\in I}O_i\Big)\cap A=\cup_{i\in I}\Big(O_i\cap A\Big)$$

où les $O_i\cap A$ sont des ouverts de A. Maintenant comme (A,d) est compact il existe $I_0\subset I$ tel que

$$A=\cup_{i\in I_0}(O_i\cap A)$$

et donc $A\subset\cup_{i\in I}O_i$.

Réciproquement si $A=\cup_{i\in I}O_i$ où les O_i sont des ouverts de A alors O_i est de la forme $U_i\cap A$ où U_i est un ouvert de E. On écrit alors

$$A=\cup_{i\in I}(U_i\cap A)=(\cup_{i\in I}U_i)\cap A.$$

D'où
$$A \subset \cup_{i\in I} U_i$$
et alors, par hypothèse,
$$A \subset \cup_{i\in I_0} U_i.$$
Finalement il vient que
$$A = \Big(\cup_{i\in I_0} U_i\Big) \cap A = \cup_{i\in I_0}\Big(U_i \cap A\Big) = \cup_{i\in I_0} O_i$$
et donc on a bien que (A, d) est compact.

Exercice 5.2

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Il existe $j_0 \in I$ tel que $x \in U_{j_0}$. Or U_{j_0} est ouvert et $x_n \to x$. Il existe donc un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \in U_{j_0}$. Soit U_{i_k} tel que $x_k \in U_{i_k}$ pour $k \leqslant n_0$. On peut écrire $C \subset U_{j_0} \cup \Big[\cup_{k\leqslant n_0} U_{i_k}\Big]$. On a donc réussi à extraire un sous-recouvrement fini.

Exercice 5.3

(i) Soit $(y_n) \subset K$ telle que $d(x, y_n) \to d(x, K)$. Puisque $K \subset E$ est compacte on peut extraire une sous-suite (y_{n_k}) de (y_n) telle que $y_{n_k} \to y$. Maintenant par continuité de la distance, voir l'Exercice 3.6, il vient que $d(x, y_{n_k}) \to d(x, y)$. D'où $d(x, y) = d(x, K)$.

(ii) Supposons par contradiction que cela ne soit pas le cas. Alors $\exists(x_n) \subset E$ et $\exists(r_n) \subset \mathbb{R}$ avec $r_n \to 0$ tels que $d(x_n, K) \leqslant r_n$ et $x_n \notin U$. Considérons une suite $(y_n) \subset K$ telle que $d(x_n, y_n) = d(x_n, K)$. Cette suite existe par (i). Aussi, puisque $K \subset E$ est compact il existe $(y_{n_k}) \subset K$ telle que $y_{n_k} \to y$. Il vient alors que
$$d(x_{n_k}, y) \leqslant d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) \to 0.$$
Il vient donc que $x_{n_k} \to y \in K \subset U$. Puisque U est un ouvert il existe une boule ouverte centrée en y et contenue dans U. Il vient donc que $x_{n_k} \subset U$ pour $n_k \in \mathbb{N}$ assez grand. Ce qui est une contradiction.

Exercice 5.4

i) On va montrer directement ce résultat. Soit $(x_n) \subset [0, 1]$ telle que $f(x_n) \to \inf_{x\in[0,1]} f(x)$. Puisque $(x_n) \subset [0, 1]$ est compact, il existe $(x_{n_k}) \subset [0, 1]$ telle que $x_{n_k} \to x_0$ pour un $x_0 \in [0, 1]$. Par continuité de f on a $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ et donc $f(x_0) = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$. Comme $f(x_0) > 0$ on a que $\inf_{x\in[0,1]} f(x) > 0$ et en posant $\alpha = f(x_0)$ il vient que $f(x) \geqslant \alpha$, $\forall x \in [0, 1]$.

ii) Sur $\mathbb{R}$ cela n'est plus forcément vrai. Pour voir cela il suffit de considérer $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$. On a bien $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5.5

(i) $G(f)$ est fermé si et seulement si

$$x_n \to x \text{ et } f(x_n) \to y \Longrightarrow y = f(x).$$

Supposons que cela soit le cas et montrons qu'alors f est continue. Soit $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \to x$ il faut montrer que $f(x_n) \to f(x)$. Mais $f(x_n) \in F$ qui est compact. D'où $f(x_{n_k}) \to y$ pour une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) et puisque le graphe est fermé on a $f(x_{n_k}) \to f(x)$.
Supposons par contradiction qu'il existe une sous-suite $(x_{n_j}) \subset E$ telle que $f(x_{n_j}) \not\to f(x)$. Alors on peut en extraire une sous-suite qui converge vers $f(x)$ ce qui est une contradiction.

(ii) Montrons tout d'abord que le graphe est fermé. On a

$$G(f) = \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}.$$

Supposons qu'il existe une suite (x_n) telle que $x_n \to x$ et $\frac{1}{x_n} \to y \in \mathbb{R}$. Alors nécessairement $(\frac{1}{x_n})$ est bornée et donc $x_n \not\to 0$. D'où $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ et $G(f)$ est bien fermé. Mais d'autre part si $x_n \to 0^+$ on a $\frac{1}{x_n} \to +\infty \neq f(0)$ c'est à dire que f n'est pas continue. L'hypothèse que (F, δ) est compacte est donc nécessaire.

Exercice 5.6

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé quelconque. On note $N < \infty$ sa dimension. On a montré dans la preuve du Théorème 5.3.1 qu'il existe une bijection isométrique entre

$$(\mathbb{R}^N, ||\cdot||_\infty) \quad \text{et} \quad (E, ||\cdot||_0).$$

On vérifie facilement que s'il existe une bijection isométrique entre deux espaces métriques alors si l'un est complet l'autre l'est aussi. On sait que si un espace vectoriel normé est complet alors il le reste si on remplace la norme par une autre norme équivalente (la complétude est une notion uniforme). On en déduit alors successivement, puisque $\mathbb{R}^N$ muni de la norme produit usuelle est complet (voir la Remarque 4.1.15), que $(\mathbb{R}^N, ||\cdot||_\infty)$ est complet puis que $(E, ||\cdot||_0)$ est complet et finalement que $(E, ||\cdot||)$ est complet.

Exercice 5.7

(i) On construit ainsi la suite : x_1 quelconque avec $||x_1|| = 1$, x_2 correspondant au choix $F = \{x_1\}$, x_3 correspondant au choix $F = \{x_1, x_2\}$ et ainsi de suite par récurrence. Clairement par construction, $||x_n - x_m|| = 1, \forall n, m \in \mathbb{N}$.

(ii) C'est évident à ce point car il est équivalent de montrer qu'en dimension infinie la boule unité fermée n'est pas compacte. Mais, par (i), on a réussi à construire une suite qui n'admet aucune sous-suite convergente. Donc, par le Théorème fondamental, la boule unité fermée n'est pas compacte.

Chapitre 6

Série 6

6.1 Enoncés des exercices

Exercice 6.1 *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et $G \subset E$ un convexe. Montrer que G est connexe.*

Corrigé

Exercice 6.2 *Montrer qu'un produit fini d'espaces métriques connexes est connexe.*

Corrigé

6.2 Corrigés des exercices

Exercice 6.1

Soit $x, y \in G$. Puisque $G \subset E$ est convexe on a que $[x, y] := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\} \subset G$. Le "segment" $[x, y]$ est l'image de $[0, 1]$ par l'application continue $\lambda \in [0, 1] \to \lambda x + (1-\lambda)y$. Comme $[0, 1]$ est connexe, $[x, y]$ l'est aussi, par la Proposition 6.1.5. Pour conclure il suffit de remarquer que puisque G est convexe on peut écrire $G = \cup_{x \in G}[\overline{x}, x]$, où $\overline{x} \in G$ est arbitraire mais fixé et utiliser la Proposition 6.1.8.

Exercice 6.2

Il suffit de le montrer pour un produit de deux espaces. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $(x_1', x_2') \in E_1 \times E_2$. Montrons que les composantes connexes de (x_1, x_2) et (x_1', x_2') sont égales (ce qui prouvera le théorème). Notons que $E_1 \times \{x_2'\}$ est homéomorphe à E_1 et donc connexe (par la Proposition 6.4.4). De même $\{x_1\} \times E_2$ est homéomorphe à E_2 et donc connexe. Maintenant $E_1 \times \{x_2'\} \cap \{x_1\} \times E_2 = (x_1, x_2') \neq \emptyset$. Donc, par la Proposition 6.1.8, $E_1 \times \{x_2'\} \cup \{x_1\} \times E_2$ est connexe et il contient (x_1, x_2) et (x_1', x_2'). Donc ces points ont la même composante connexe.

Troisième partie

Devoirs

Devoir 1

Exercice D1.1 *Soit (E, d) un espace métrique et $O \subset E$. Montrer que O est ouvert si et seulement si pour toute suite (x_n) de E qui converge vers un élément de O il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geqslant n_0$.*

Exercice D1.2 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ si $x \geqslant 0$, $f(x) = x$ sinon.*

(i) Montrer que d définie par $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

(ii) Calculer les boules ouvertes $B(0, r)$ pour cette distance, suivant r.

(iii) Calculer l'intérieur de $[0, 1[$, l'adhérence de $]-1, 0[$.

(iv) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle si et seulement si A est un ouvert de $(\mathbb{R}, d)$.

Exercice D1.3 *Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.*

(i) Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $N(f) = \int_0^1 x\,|f(x)|\,dx$, est une norme sur E telle que : $\forall f \in E$, $N(f) \leqslant \|f\|_1$.

(ii) Soit (f_n) la suite définie pour tout $n > 1$ par $f_n(x) = n - n^2 x$ si $x \leqslant 1/n$, $f_n(x) = 0$ sinon. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle dans (E, N). Converge-t-elle dans $(E, \| \|_1)$? Est-ce que les distances associées sont topologiquement équivalentes ?

(iii) Soit $a \in]0, 1]$. Soit $B = \{f \in E : f(x) = 0 \ \forall x \in [0, a]\}$. Montrer que les topologies induites sont les mêmes sur B pour N et $\| \|_1$ et que B est fermé dans $(E, \| \|_1)$. Calculer l'intérieur de B.

Devoir 2

Exercice D2.1 *Soit H un espace préhilbertien.*

(i) Montrer que l'application produit scalaire $\langle x, y\rangle \in H \times H \to \mathbb{R}$ est continue sur l'espace produit $H \times H$.

(ii) En déduire que si $F \subset H$ alors $F^{\perp}$ est fermé.

(iii) Montrer que si $F \subset H$ alors $(\overline{F})^{\perp} = F^{\perp}$.

Exercice D2.2 *Soit c_0 l'espace vectoriel des suites réelles (x_n) convergentes vers 0 muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Soit l^1 l'espace vectoriel des suites réelles (x_n) telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ converge.*

(i) Vérifier que l^1 est un sous espace de c_0.

(ii) Montrer que l^1 est dense dans $(c_0, ||\cdot||_\infty)$.

(iii) Montrer que l^1 muni de la norme $||\cdot||_\infty$ n'est pas fermé dans c_0.

(iv) Est-ce que les normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ sont équivalentes sur l^1 ?

Exercice D2.3 *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 0, muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.*

Soit E' le dual topologique de E (i.e. l'ensemble des applications linéaires continues de $E \to \mathbb{R}$).

Soit $l^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où la série $\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|$ est convergente, muni de la norme $||y||_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|$.

L'objectif de l'exercice est de montrer que E' peut être identifié à $l^1(\mathbb{R})$ au sens où il existe une isométrie surjective entre ces deux espaces.

(i) Pour tout $y \in l^1(\mathbb{R})$ on définit l'application linéaire $L_y : E \to \mathbb{R}, x \to \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$.
   a) Montrer que L_y est bien définie, que c'est un élément de E' et que $||L_y|| \leqslant ||y||_1$.
   b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $||L_y|| \geqslant ||y||_1 - \varepsilon$ et en déduire $||L_y||$.

(ii) On considère l'application $L : l^1(\mathbb{R}) \to E', y \to L_y$. Montrer que L est une application linéaire continue qui conserve la norme (i.e. une isométrie).

(iii) *Soit* $T \in E'$. *On pose* $e_n = (0, 0, ..0, 1, 0, ...)$ *(le 1 est en n-ième position).*

a) Montrer que $\forall x = (x_n)_{n \geqslant 1}$ *de* E *la suite dont le terme d'ordre* N *est* $\sum_{i=0}^{N} x_i e_i$ *converge vers* x *dans* E.

b) En déduire que la série de terme général $x_n T(e_n)$ *est convergente et de somme* $T(x)$.

c) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} |T(e_n)| < \infty$.

(iv) *Déduire de ce qui précède que l'isométrie* $L : l^1(\mathbb{R}) \to E'$ *est surjective.*

Devoir 3

Exercice D3.1 *Soient E un espace vectoriel normé, (u_n) une suite de Cauchy dans E et (v_n) la suite définie par*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

Montrer que (v_n) est de Cauchy dans E.

Exercice D3.2 *Soit (E, d) un espace métrique complet et $U \in E$ un ouvert non vide. Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut munir U d'une distance δ topologiquement équivalente à la distance induite par d sur U, telle que (U, δ) soit complet.*

(i) *On définit l'application $\delta : U \times U \to \mathbb{R}$ par*

$$\delta(x, y) = \max\{d(x, y), |\frac{1}{d(x, E \backslash U)} - \frac{1}{d(y, E \backslash U)}|\}.$$

Vérifier que δ est bien définie et qu'il s'agit bien d'une distance.

(ii) *Montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes sur U (indication : utiliser la propriété que si d et δ admettent les même suites convergentes elles sont topologiquement équivalentes).*

(iii) *Conclure.*

Exercice D3.3 *Soient (E, d_1) et (F, d_2) deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application continue. On suppose que l'image réciproque par f de tout compact K de F est compacte. Montrer que f est alors fermée (i.e. que l'image d'un fermé par f est un fermé).*

Exercice D3.4 *Soit (X, d) un espace métrique. On munit l'espace produit $X \times X$ de la distance*

$$\overline{d}\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

(où $(x_1, y_1) \in X \times X$ et $(x_2, y_2) \in X \times X$.)

(i) *Soit* W *un ouvert de* $(X \times X, \overline{d})$ *et* $(x, y) \in W$. *Montrer qu'il existe* $r > 0$ *tel que si* $d(x, \overline{x}) < r$ *et* $d(y, \overline{y}) < r$ *alors* $(\overline{x}, \overline{y}) \in W$.

(ii) *On suppose que* (X, d) *est compact et que l'ouvert* W *contient la diagonale* $\{(x, x) : x \in X\}$. *Montrer qu'il existe* $r > 0$ *tel que*

$$\forall (x, y) \in X \times X \quad d(x, y) < r \Longrightarrow (x, y) \in W.$$