Exercice 1 *soit* $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *une fonction contractante de rapport* k

1. *Montrer que la fonction* g *admet un point fixe unique* $l \in [a,b]$
2. *Soit* $x_0 \in [a,b]$ *et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, la suite définie par* $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall n \geq 0$*, montrer que cette suite converge vers* l

Exercice 2 *On considère la fonction* $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$

1. *Etudier les variations de* f *et en déduire le nombre de solutions de cette équation ainsi que leurs localisations dans des intervalles ouverts*
2. *Rechercher par Dichotomie la solution de* $f(x) = 0$ *dans l'intervalle* $]0,1[$ *à* $1/2^4$ *près*
3. *Déterminer le nombre d'itérations nécessaires par Dichotomie pour une précision de* $\epsilon = 10^{-4}$
4. *Calculer les quatre premières itérations par la méthode de Lagrange en prenant* $a_0 = 0$ *et* $b_0 = 1$*, en précisant la précision à chaque itération*
5. *Reprendre le 4. par la méthode de Newton avec* $x_0 = 0.5$
6. *Reprendre le 4. par la méthode de la Sécante avec* $x_0 = 0$ *et* $x_1 = 1$
7. *on considère la fonction* g *définie par* $g(x) = \dfrac{12x^5 - 10x^3 - 1}{15x^2(x^2-1)}$

   a- *Montrer que* $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$

   b- *Calculer les quatre premières itérations par la méthode du point fixe associée à* g

   c- *Comparer avec le 5.*

Exercice 3 *Soit* $f(x) = x^3 - 4x + 1$

1. *Montrer que* f *admet trois racines réelles* l_1, l_2, l_3 *dans des intervalles a déterminer et contenus dans* $[-2.5, 2]$.
2. *On pose* $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$*, calculer les quatre premières itération par la méthode du point fixe oú* x_0 *prend successivement les valeurs* -2, 0 *et* 2.

Exercice 4 *On Considère l'équation non linéaire* $f(x) = e^x + \dfrac{x^2}{2} + x - 1 + 0$ *dans* $[-1,1]$

1. *Montrer que* f *admet un zéro* α *dans l'intervalle* $[-1,1]$
2. *Donner avec une précision de* 10^{-4} *la solution* α *avec la méthode de*

   a- *Dichotomie*

   b- *Lagrange*

   c- *Newton*

   d- *la Sécante*

Solution de l'exercice 1

Rappel: *Soit $k \in]0,1[$. Une fonction $g :]a,b[\Longrightarrow \mathbb{R}$ st dite fonction contractante de rapport k si*

$$\forall x, y \in [a,b] \qquad |g(x) - g(y)| \leq k|x-y|$$

Remarque:

i. *soit $g \in \mathcal{C}^1[a,b]$. Si $g^{'}(x) < 1$, $\forall x \in [a,b]$ alors g est contractante sur $[a,b]$*

ii. *Une fonction contractante est continue*

1. *on note f la fonction définie par $f(x) = g(x) - x$. avec $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ la fonction g est contractante donc continue et par suite f est continue par composition. Par ailleurs $g(]a,b[) \subset]a,b[$ d'oú $g(a) > a$ et $g(b) < b$ ce qui entraine que $f(a)f(b) < 0$. Le théorème de la Valeur Intermédiaire entraine l'existence d'un $l \in]a,b[$ tel que $f(l) = 0$ soit $g(l) = l$.*

2. *on considère la suite (x_n) définie par x_0 donné et $x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$*
   Notons que l'inclusion $g(]a,b[) \subset]a,b[$ entraine que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   Montrons que c'est une suite de Cauchy
   par hypothèse

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

donc, par récurrence, on a

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Par suite pour $n \geq 0$ et $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} k^{n+k-1} |x_1 - x_0| \\
&\leq |x_1 - x_0|\, k^n \,(1 + k + \ldots + k^{p-1}) \\
&\leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k} \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

c a d que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0 \quad \forall p \geq 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans $[a,b]$ qui est complet donc (x_n) converge vers l.
Or la fonction g est continue donc $\qquad g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(l)$
Et en passant à la limite, l'égalité $x_{n+1} = g(x_n)$ entraine que $l = g(l)$
unicité *de l*
Soient l_1, l_2 deux points fixes de g, alors $l_1 = g(l_1)$ et $l_2 = g(l_2)$, or

$$|l_1 - l_2| = |g(l_1) - g(l_2)| < k|l_1 - l_2| \quad \text{avec} \quad k < 1 \quad \text{donc} \quad l_1 = l_2$$

Solution de l'exercice 2 *Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$*

1. *Variations de f*
   $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$ et le tableau de variation de f est représenté comme suit:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$	$-\infty$ $\nearrow$	3 $\searrow$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

En notant que f est continue sur $\mathcal{R}$ et que $f(-2) = -55$, $f(0) = 1$ et que $f(2) = 57$, alors d'après le Théorème de la Valeur Intermédiaire, on en déduit que f admet trois racines distinctes l_1, l_2, l_3 dans les intervalles respectifs $]-2,-1[$, $]0,1[$, et $]1,2[$

2. *Méthode de dichotomie pour résoudre $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$ Notons que la solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0,1[$ est notée l_2 alors l'estimation de de l'erreur est donnée par la formule suivante:*

$$|x_k - l_2| \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^{k+1}} \quad \text{avec } a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 0$$

donc pour que $|x_k - l_2| \leq \dfrac{1}{2^4}$, il suffit de prendre $k = 3$ et de calculer x_3 de la façon suivante

$a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ $\quad x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 0.5 \quad f(x_0) = 0.468... \quad f(a_0)f(x_0) > 0$

$a_1 = x_0 = 0.5$ et $b_1 = b_0 = 1$ $\quad x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 0.75 \quad f(x_1) = -0.397461 \quad f(a_1)f(x_1) < 0$

$a_2 = a_1 = 0.5$ et $b_2 = x_1 = 0.625$ $\quad x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 0.625 \quad f(x_2) = 0.065399 \quad f(a_2)f(x_2) > 0$

$a_3 = x_2 = 0.625$ et $b_3 = b_2 = 0.75$ $\quad x_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = 0.6875$

La solution approchée à $\dfrac{1}{2^4}$ près est donc $x_3 = 0.6875$
Pour de plus amples résultats, nous avons le tableau suivant:

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$	$x_{k+1} - x_k$	$(b_k - a_k)/2$
0	0.000000	0.500000	1.000000	1.000000	0.468750	-1.000000		5.0E-01
1	0.500000	0.750000	1.000000	0.468750	-0.397461	-1.000000	2.5E-01	2.5E-01
2	0.500000	0.625000	0.750000	0.468750	0.065399	-0.397461	-1.3E-01	1.3E-01
3	0.625000	0.687500	0.750000	0.065399	-0.163985	-0.397461	6.3E-02	6.3E-02
4	0.625000	0.656250	0.687500	0.065399	-0.047969	-0.163985	-3.1E-02	3.1E-02
5	0.625000	0.640625	0.656250	0.065399	0.009135	-0.047969	-1.6E-02	1.6E-02
6	0.640625	0.648438	0.656250	0.009135	-0.019323	-0.047969	7.8E-03	7.8E-03
7	0.640625	0.644531	0.648438	0.009135	-0.005069	-0.019323	-3.9E-03	3.9E-03
8	0.640625	0.642578	0.644531	0.009135	0.002039	-0.005069	-2.0E-03	2.0E-03
9	0.642578	0.643555	0.644531	0.002039	-0.001513	-0.005069	9.8E-04	9.8E-04
10	0.642578	0.643066	0.643555	0.002039	0.000263	-0.001513	-4.9E-04	4.9E-04
11	0.643066	0.643311	0.643555	0.000263	-0.000625	-0.001513	2.4E-04	2.4E-04
12	0.643066	**0.643188**	0.643311	0.000263	-0.000181	-0.000625	-1.2E-04	1.2E-04
13	0.643066	0.643127	0.643188	0.000263	0.000041	-0.000181	**-6.1E-05**	6.1E-05
14	0.643127	0.643158	0.643188	0.000041	-0.000070	-0.000181	3.1E-05	3.1E-05
15	0.643127	0.643143	0.643158	0.000041	-0.000014	-0.000070	-1.5E-05	1.5E-05
16	0.643127	0.643135	0.643143	0.000041	0.000014	-0.000014	-7.6E-06	7.6E-06

Ex2-2 Dichotomie

Notons que les quatre premiers chiffres après la virgule se stabilisent à partir de $k = 12$

3. *Nombre d'itérations pour avoir une précision de* $\epsilon = 10^{-4}$

$$Pour\ que\ \ |x_k - l_2| \leq 10^{-4}\ il\ suffit\ que\ \ \frac{|b_0 - a_0|}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \leq 10^{-4}$$

$$c.a.d.\ \ 2^{k+1} = e^{(k+1)ln(2)} \geq 10^4 \qquad d'o\acute{u}\ \ k+1 \geq \frac{ln(10^4)}{ln(2)} \Longrightarrow k \geq 12.28$$

On en déduit qu'à partir de la treizième itération l'erreur est plus petite que 10^{-4}, *et c'est ce que l'on retrouve sur le tableau précédent*

4. *Calcul des quatre premières itérations avec la méthode de Lagrange avec* $a_0 = 0$ *et* $b_0 = 1$ *dans ce qui suit, le point* c_k *est déterminé par la formule* $c_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$, *d'oú*

$$\begin{array}{llll}
a_0 = 0 & b_0 = 1 & c_0 = 0.5 & f(a_0)f(c_0) > 0 \\
a_1 = c_0 = 0.5 & b_1 = b_0 = 1 & c_1 = 0.659574 & f(a_1)f(c_1) < 0 \\
a_2 = a_1 = 0.5 & b_2 = c_1 = 0.659574 & c_2 = 0.641410 & f(a_2)f(c_2) > 0 \\
a_3 = c_2 = 0.641410 & b_3 = b_2 = 0.659574 & c_3 = 0.643127 & f(a_3)f(c_3) > 0 \\
a_4 = c_3 = 0.643127 & b_4 = b_3 = 0.659574 & c_4 = 0.643138 &
\end{array}$$

Pour de plus amples résultats nous avons le tableau suivant:

k	a_k	c_k	b_k	$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$	$c_{k+1} - c_k$	$b_k - a_k$
0	0.00000000	0.50000000	1.00000000	1.00000000	0.46875000	-1.00000000		
1	0.50000000	0.65957447	1.00000000	0.46875000	-0.06021119	-1.00000000	1.6E-01	5.0E-01
2	0.50000000	0.64141025	0.65957447	0.46875000	0.00628356	-0.06021119	-1.8E-02	1.6E-01
3	0.64141025	**0.643127**	0.65957447	0.00628356	0.00004391	-0.06021119	1.7E-03	1.8E-02
4	0.64312671	0.64313870	0.65957447	0.00004391	0.00000030	-0.06021119	**1.2E-05**	1.6E-02
5	0.64313870	0.64313878	0.65957447	0.00000030	0.00000000	-0.06021119	8.3E-08	1.6E-02
6	0.64313878	0.64313878	0.65957447	0.00000000	0.00000000	-0.06021119	5.7E-10	1.6E-02
7	0.64313878	0.64313878	0.65957447	0.00000000	0.00000000	-0.06021119	4.0E-12	1.6E-02
8	0.64313878	0.64313878	0.65957447	0.00000000	0.00000000	-0.06021119	2.7E-14	1.6E-02

Ex2-4 Lagrange

5. *Méthode de Newton avec* $x_0 = 0.5$ *La suite* (x_n) *est calculée à partir de la formule itérative* $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, *ainsi*

$$\begin{array}{lcll}
x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} & = & 0.5 - \dfrac{0.46875}{-2.8125} & = 0.666666667 \\
x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} & = & 0.6666667 - \dfrac{0.0864197}{-3.7037037} & = 0.643333333 \\
x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} & = & 0.64333333 - \dfrac{-0.0007078}{-3.6387444} & = 0.643138799 \\
x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)} & = & 0.6431387 - \dfrac{-6.29564E-08}{-3.6380969} & = 0.643138782
\end{array}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k$
0	0.5	0.46875	-2.8125000	
1	0.666666667	-0.086419753	-3.7037037	1.7E-01
2	0.643333333	-0.000707859	-3.6387444	-2.3E-02
3	0.643138799	-6.29564E-08	-3.6380969	-1.9E-04
4	**0.643138782**	0	-3.6380969	-1.7E-08
5	0.643138782	0	-3.6380969	0.0E+00

Ex2-5 Newton

6. *Méthode de la Sécante avec* $x_0 = 0$ *et* $x_1 = 1$, *la suite itérative* x_n *est définie par:*

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \text{ ainsi}$$

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0 \times -1 - 1 \times 1}{-1 - 1} = 0.5$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1 \times 0.46875 - 0.5 \times -1}{0.46875 - (-1)} = 0.6595745$$

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{0.5 \times -0.0620211 - 0.659574 \times 0.46875}{-0.060211 - 0.46875} = 0.6414102$$

$$x_5 = \frac{x_3 f(x_4) - x_4 f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = \frac{0.659574 \times 0.0062835 - 0.641410 \times -0.0620211}{0.0062835 - (-0.0620211)} = 0.6431267$$

k	x_k	x_{k+2}	x_{k+1}	$f(x_k)$	$f(x_{k+2})$	$f(x_{k+1})$	$x_{k+2} - x_{k+1}$
0	0.000000	0.5000000	1.000000	1.00000000	0.46875000	-1.00000000	
1	1.000000	0.6595745	0.500000	-1.00000000	-0.06021119	0.46875000	1.6E-01
2	0.500000	0.6414102	0.659574	0.46875000	0.00628356	-0.06021119	-1.8E-02
3	0.659574	0.6431267	0.641410	-0.06021119	0.00004391	0.00628356	1.7E-03
4	0.641410	**0.6431388**	0.643127	0.00628356	-0.00000004	0.00004391	1.2E-05
5	0.643127	0.6431387822	0.643139	0.00004391	0.00000000	-0.00000004	-9.6E-09
6	0.643139	0.6431387822	0.643139	-0.00000004	0.00000000	0.00000000	5.3E-14

Ex2-6 Sécante

7. *Méthode du point fixe pour* $g(x) = \dfrac{12x^5 - 10x^3 - 1}{15x^2(x^2 - 1)}$

a- *Montrons que* $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$ *il suffit de noter que* $g'x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

b- *Calcul des quatre premières itérations par la méthode du point fixe associée à* g

$$x_1 = g(x_0) = \frac{12x_0^5 - 10x_0^3 - 1}{15x_0^2(x_0^2 - 1)} = \frac{12 \times (\frac{1}{2})^5 - 10 \times (\frac{1}{2})^3 - 1}{15 \times (\frac{1}{2})^2((\frac{1}{2})^2 - 1)} = \frac{2}{3} = 0.666666667$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{12x_1^5 - 10x_1^3 - 1}{15x_1^2(x_1^2 - 1)} = 0.643333333$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{12x_2^5 - 10x_2^3 - 1}{15x_2^2(x_2^2 - 1)} = 0.643138799$$

$$x_4 = g(x_3) = \frac{12x_3^5 - 10x_3^3 - 1}{15x_3^2(x_3^2 - 1)} = 0.643138782$$

k	$x_{k+1} = g(x_k)$	$x_{k+1} - x_k$
0	0.5	
1	0.666666667	1.7E-01
2	0.643333333	-2.3E-02
3	**0.643138799**	-1.9E-04
4	0.643138782	-1.7E-08
5	0.643138782	0.0E+00
6	0.643138782	0.0E+00

Ex2-7 Point fixe

c- *Comparaison avec le 5.. Les résultats sont identiques*

Solution de l'exercice 3 *Soit* $f(x) = x^3 - 4x + 1$

1. *détermination des racines de* $f(x) = x^3 - 4x + 1$. *alors* $f'(x) = 3x^2 - 4$ *et le tableau de variation de* f *est représenté comme suit:*

x	$+\infty$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f(x) = x^3 - 4x + 1$	$-\infty$ $\nearrow$	α $\searrow$	β $\nearrow$	$+\infty$

oú $\alpha = f(\frac{-2}{\sqrt{3}}) = \frac{-8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} + 1 > 0$ *et* $\beta = f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + 1 < 0$

Par ailleurs, on notera que $f(-2.5)f(-2) = -4.625 \times 1 < 0$
$f(0)f(1) = 1 \times -2 < 0$
et $f(2) = 1 > 0$
La fonction f *étant continue, on en déduit d'après le T.V.I. que* f *admet trois racines* l_1, l_2, l_3 *dans les intervalles respectifs* $]-2.5, -2[$, $]0, 1[$, *et* $]\frac{2}{\sqrt{3}}, 2[$

2. *calcul des Quatre premières itérations par la méthode du point fixe associé à* $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$f(x) = x^3 - 4x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad et \quad g(x) = x - \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 4} = \frac{x^3 - 1}{3x^2 - 4}$$

ainsi pour $x_0 = 0$ *on a*

$$\begin{aligned}
x_1 = g(x_0) = \frac{x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 4} &= \frac{(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 4} &&= -\frac{9}{8} = 2.125 \\
x_2 = g(x_1) = \frac{x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 4} &= \frac{(-2.125)^3 - 1}{3(-2.125)^2 - 4} &&= -2.11497545008 \\
x_3 = g(x_2) = \frac{x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 4} &= \frac{(-2.11497545008)^3 - 1}{3(-2.11497545008)^2 - 4} &&= -2.11490754458 \\
x_4 = g(x_3) = \frac{x_3^3 - 1}{3x_0^3 - 4} &= \frac{(-2.11490754458)^3 - 1}{3(-2.11490754458)^2 - 4} &&= -2.11490754148
\end{aligned}$$

Les valeurs des quatre premières itérations à partir des autres valeurs initiales $x_0 = 0$ *puis* $x_0 = 2$ *sont calculés de façon similaire et reproduits dans le tableau suivant:*

				x_0 =-2	x_0 =0	x_0 =2
k	x_k	x_k	x_k	$x_{k+1} - x_k$	$x_{k+1} - x_k$	$x_{k+1} - x_k$
0	-2.00000000000	0.00000000000	2.00000000000			
1	-2.12500000000	0.25000000000	1.87500000000	-1.25E-01	2.50E-01	-1.25E-01
2	-2.11497545008	0.25409836066	1.86097852029	1.00E-02	4.10E-03	-1.40E-02
3	-2.11490754458	0.25410168836	1.86080587916	6.79E-05	3.33E-06	-1.73E-04
4	-2.11490754148	0.25410168837	1.86080585311	3.11E-09	2.22E-12	-2.60E-08

Ex3 Méthode du Point fixe

Notons que ces calculs correspondent exactement à, ceux de la methode de Newton appliquée à f, établis ci-dessous pour $x_0 = -2$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k$
0	-2	1	8.000000	
1	-2.125	-0.095703125	9.546875	-1.3E-01
2	-2.11497545	-0.000639627	9.419363	1.0E-02
3	-2.114907545	-2.92571E-08	9.418502	6.8E-05
4	**-2.114907541**	-1.77636E-15	9.418502	3.1E-09
5	-2.114907541	-1.77636E-15	9.418502	0.0E+00
6	-2.114907541	-1.77636E-15	9.418502	0.0E+00

Ex3 Newton

Solution de l'exercice 4

1. *Montrons que f admet un zéro α dans l'intervalle $]-1,1[$*

   La fonction $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-1,1[$

   de plus $f(-1)f(1) = (\frac{1}{e} - \frac{3}{2})(e + \frac{1}{2}) < 0$

   donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, $\exists \alpha \in]-1,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. *Résultats numériques avec une précision de 10^{-4}*

   *a- **Méthode de Dichotomie***

   Rappelons que $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, alors les quatre premières itération s'écrivent:

$a_0 = -0.75$	$b_0 = 1$	$x_0 = 0.125$	$f(x_0) = 0.142914$	$f(a_0)f(x_0) < 0$
$a_1 = a_0 = -0.75$	$b_1 = x_0 = 0.125$	$x_1 = -0.3125$	$f(x_1) = -0.250074$	$f(a_1)f(x_1) > 0$
$a_2 = x_1 = -0.3125$	$b_2 = b_1 = 0.125$	$x_2 = -0.09375$	$f(x_2) = -0.085919$	$f(a_2)f(x_2) > 0$
$a_3 = x_2 = -0.09375$	$b_3 = b_2 = 0.125$	$x_3 = 0.015625$	$f(x_3) = 0.015874$	$f(a_3)f(x_3) < 0$
$a_4 = a_3 = -0.09375$	$b_4 = x_3 = 0.015625$	$x_4 = -0.039063$		

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$	$x_{k+1} - x_k$	$(b_k - a_k)/2$
0	-0.750000	0.125000	1.000000	-0.668258	0.142914	3.218282		8.8E-01
1	-0.750000	-0.312500	0.125000	-0.668258	-0.250074	0.142914	-4.4E-01	4.4E-01
2	-0.312500	-0.093750	0.125000	-0.250074	-0.085919	0.142914	2.2E-01	2.2E-01
3	-0.093750	0.015625	0.125000	-0.085919	0.015874	0.142914	1.1E-01	1.1E-01
4	-0.093750	-0.039063	0.015625	-0.085919	-0.037606	0.015874	-5.5E-02	5.5E-02
5	-0.039063	-0.011719	0.015625	-0.037606	-0.011583	0.015874	2.7E-02	2.7E-02
6	-0.011719	0.001953	0.015625	-0.011583	0.001957	0.015874	1.4E-02	1.4E-02
7	-0.011719	-0.004883	0.001953	-0.011583	-0.004859	0.001957	-6.8E-03	6.8E-03
8	-0.004883	-0.001465	0.001953	-0.004859	-0.001463	0.001957	3.4E-03	3.4E-03
9	-0.001465	0.000244	0.001953	-0.001463	0.000244	0.001957	1.7E-03	1.7E-03
10	-0.001465	-0.000610	0.000244	-0.001463	-0.000610	0.000244	-8.5E-04	8.5E-04
11	-0.000610	-0.000183	0.000244	-0.000610	-0.000183	0.000244	4.3E-04	4.3E-04
12	-0.000183	**0.000031**	0.000244	-0.000183	0.000031	0.000244	2.1E-04	2.1E-04
13	-0.000183	-0.000076	0.000031	-0.000183	-0.000076	0.000031	-1.1E-04	1.1E-04
14	-0.000076	-0.000023	0.000031	-0.000076	-0.000023	0.000031	5.3E-05	5.3E-05
15	-0.000023	0.000004	0.000031	-0.000023	0.000004	0.000031	2.7E-05	2.7E-05
16	-0.000023	-0.000010	0.000004	-0.000023	-0.000010	0.000004	-1.3E-05	1.3E-05

Ex4-2a Dichotomie