RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Cours Équation de la physique Mathématique

Licence 3

Mathématiques

Réalisé par

Dr **Souhila Sabit**

Table des matières

Chapitre 1

EDP d'ordre1-Méthodes des caractéristiques

Il existe une infinité d'équation aux dérivées partielles.Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci.Il faut donc restreindre notre champ d'étude.On réalisera ceci en exigeant que l'équation satisfasse certaine propriétés.par exemple qu'elle soit linéaire.C'est ce que nous décrirons dans ce section.Nous énumérerons aussi quelques-unes des équations aux dérivées partielles classiques. Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des équations aux dérivées partielles.L'acoustique, l'aérodynamique, la dynamique des fluide, l'élasticité, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique quantique, la météorologie, l'océanographie, la physique des plasmas sont quelques-uns de ces domaines.

1.1 Dérivation des fonctions composées

Proposition 1.1. *On rappelle les formules de dérivation des fonctions composées à plusieurs variables. Par exemple dans le cas :*

Exemple 1.1.

$$g(s,t) = f\left(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\right)$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t} \end{cases} \tag{1.1}$$

Ce que l'on peut également noter :

$$\begin{cases} g_s = f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s \\ \\ g_t = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t \end{cases} \tag{1.2}$$

1.1.1 Dérivées partielles d'ordre supérieure

Proposition 1.2. *Les dérivées d'ordre deux sont les dérivées premières de fonctions qui sont elle-mêmes dérivées partielles premières d'une fonction. Et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.*

Exemple 1.2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

De même on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Proposition 1.3.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Si les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues

1.2 Concepts de base et définitions

Définition 1.1 (EDP)**.** *Une équation aux dérivées partielles ou EDP, est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,les variables $x_1, x_2, ...,$ ses dérivées partielles, $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ... \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)$. Elle s'écrit de façon générale :*

$$F\left(x_1, x_2, ...x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ... \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0 \tag{1.3}$$

L'équation (1.3) *est considérée dans domaine Ω de $\mathbb{R}^n$.*
Les ***solutions de l'équation aux dérivées partielles*** (1.3) *sont les fonctions qui vérifient cette équation dans Ω.*

Exemple 1.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.4}$$

Les fonctions $u(x, y) = (x+y)^3$ et $u(x, y) = sin(x-y)$ sont toutes deux des solutions de (1.4).

Définition 1.2 (L'ordre d'une EDP)**.** *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.*

Exemple 1.4.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \tag{1.5}$$

— *L'équation* (1.4) *est d'ordre 2.*
— *L'équation* (1.5) *est d'ordre 1.*

Définition 1.3. *En mathématiques, un problème est dit* ***bien posé*** *s'il a une solution et si cette solution est unique.*

1.2.1 Équation aux dérivée partielle linéaire

Définition 1.4. *Une équation aux dérivées partielles est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. On peut écrire sous la forme :*

$$L(u) = f \tag{1.6}$$

L : l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.

Exemple 1.5.
— *L'équation* (1.4) *est linéaire homogène.*

Définition 1.5. *Une équation aux dérivées partielles homogène est :*

$$L(u) = 0$$

Théorème 1.1.

1. *Si u est solution de* (1.6) *et v solution de l'équation homogène.alors $u + v$ est solution de* (1.6)
2. *Si u_1 est solution de $L(u) = f_1$ et u_2 est solution de $L(u) = f_2$ alors $u_1 + u_2$ est solution de $L(u) = f_1 + f_2$*

1. Comme : $L(u) = f$ et $L(v) = 0$.
   Donc : $L(u + v) = L(u) + L(v) = f$ car la linéarité de L.
   Alors : $u + v$ est solution de (1.6)
2. Nous savons que $L(u_1) = f_1$ et que $L(u_2) = f_2$.
   Par conséquent $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = f_1 + f_2$.
   Nous avons donc que $u_1 + u_2$ est solution de $L(u) = f_1 + f_2$.

Théorème 1.2. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n dépend linéairement de n fonctions arbitraires.*

Exemple 1.6. *Considérons par exemple, l'équation linéaire homogène*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

En intégrant par rapport à y,on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$$

En intégrant ensuite par rapport à x,et en notant F est une primitive de la fonction arbitraire f, on obtient :

$$u(x, y) = F(x) + h(y)$$

Les fonctions F et h sont deux fonctions quelconques.

1.2.2 Équation aux dérivée partielle quasi-linéaire

Définition 1.6. *Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u.*

Définition 1.7. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles du premier ordre est* ***quasi-linéaire*** *si elle est de la forme :*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, u)(\frac{\partial u}{\partial x_i}) = s(x, u) \tag{1.7}$$

où

- *$u(x)$ est la fonction inconnue de x.*
- *$f_i(x, u)$ et $s(x, u)$ sont des fonctions connues de x et de u*

Exemple 1.7.

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = x \tag{1.8}$$

1.2.3 Équation aux dérivée partielle Non-linéaire

Définition 1.8. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.*

$$H(x, v(x), v_x(x)) = 0, \forall x \in I\!R^n \tag{1.9}$$

Nous allons résoudre cette équation par la méthode des caractéristiques, en la réecrivantcomme

$$H(x, v(x), p) = 0; p = v_x(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n.$$

Si $H_p \neq 0$, par exemple $\frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$, on peut, en invoquant le théorème des fonctions implicites, tirer p_n de l'équation, ou de manière équivalente se ramener au cas ou $\frac{\partial H}{\partial p_n}$ vaut identiquement 1. Identifiant x_n au temps on peut alors réécrire (1.9) sous la forme

$$v_t + \widetilde{H}(\widetilde{x}, t, v, v_{\widetilde{x}}) = 0,$$

Exemple 1.8. *L'équation* (1.5)

1.2.4 Les conditions aux limites

Définition 1.9.

i. *On appelle* ***condition de Dirichlet*** *une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$. Une* ***problème du premier type*** *est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.*

ii. *On appelle* ***condition de Neumann*** *une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$. Un* ***problème du deuxième type*** *est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.*

iii. *On appelle* ***condition de Fourier-Robin*** *une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$.*

1.3 Équation aux dérivées partielles du premier ordre

On s'intéresse maintenant à la résolution d'une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre :

$$f(x, y, u(x, y))\frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y, u(x, y))\frac{\partial u}{\partial y} = h(x, y, u(x, y)) \tag{1.10}$$

1.3.1 Solution générale

Une solution u de (1.10) peut être vue comme une fonction associant à un point (x, y) du plan une altitude $z = u(x, y)$,et être interprétée comme une surface de $\mathbb{R}^3$. On choisit alors de rechercher les solutions de (1.10) sous forme implicite, i.e. des fonctions φ définissant implicitement u comme solution de (1.10) :

$$\varphi(x, y, z) = Constante \Longleftrightarrow z = u(x, y)$$

D'après le **Théorème des fonctions implicites** (A.1) , en tout point où $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}} \qquad et \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}} \tag{1.11}$$

u est alors solution de (1.10) si :

$$f(x,y,u(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x} + g(x,y,u(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial y} + h(x,y,u(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{1.12}$$

φ est donc une intégrale première du système

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \tag{1.13}$$

Le système (1.13) est appelé **système caractéristique** de (1.10). Ceci nous amène donc au théorème suivant :

Théorème 1.3. *Les solutions de* (1.10) *sont les intégrales premières du système caractéristique* (1.13)*. Si φ et ϕ sont deux intégrales premières indépendantes et F une fonction de deux variables non constante, alors les solutions s'écrivent sous forme implicite :*

$$F(\phi(x,y,u(x,y)), \varphi(x,y,u(x,y))) = Constante \tag{1.14}$$

Exemple 1.9. *Soit à résoudre :*

$$x(y-u)\frac{\partial u}{\partial x} + y(u-x)\frac{\partial u}{\partial y} = (x-y)u$$

Le système caractéristique est : $(u(x,y) = z)$

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

Les intégrales premières sont données par :

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \longmapsto \phi(x,y,z) & = & x+y+z \\ & et & \\ (x,y,z) \longmapsto \varphi(x,y,z) & = & xyz \end{array}$$

Les fonctions de la forme $(x,y,z) \longmapsto \psi(x,y,z) = F(\phi(x,y,z), \varphi(x,y,z))$ décrivent l'ensemble des intégrales premières.
On peut donc donner les solutions u sous forme implicite :

$$(x,y) \longmapsto F(x+y+u(x,y), xyu(x,y)) = Constante$$

1.3.2 Cas particulier : $f(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

C'est l'équation des intégrales premières de :

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g}$$

Une solution est donc de la forme $u = H(x,y)$ où H est une intégrale premières de :

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g}$$

Soit φ l'une de ces intégrales premières, on sait que toutes les autres sont de la forme $F(\varphi)$, F étant de classe C^1.

Théorème 1.4. *Soit :*

$$f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.15}$$

et :

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} \tag{1.16}$$

son système caractéristique. Pour résoudre (1.15) on cherche une intégrale première z de (1.16) toute solution de (1.15) est alors de la forme $u = F[z]$ où F est de classe C^1.

Exemple 1.10.

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.17}$$

Le système caractéristique de (1.17) *est donné par :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} \\ 0 = dz \end{cases} \tag{1.18}$$

On voit directement que $(x,y,z) \longmapsto \phi(x,y,z) = z$ est une intégrale première. Par ailleurs :

$$0 = xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2)$$

Autrement dit, $(x,y,z) \longmapsto \varphi(x,y,z) = x^2+y^2$ est également une intégrale première.

Toutes les solutions sont donc définies implicitement sous la forme :

$$(x,y) \longmapsto F(x^2+y^2, u(x,y)) = Constante$$

ce qui conduit à :

$$u(x,y) = g(x^2+y^2)$$

Les solutions sont les surfaces de révolution d'axe $(O; \mathbf{vec}z)$

1.3.3 Courbes caractéristiques

Définition 1.10. *f, g, h étant trois fonctions, supposées de classe C^1 dans ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle* ***courbes caractéristiques*** *de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$f(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y,u(x,y)) \tag{1.19}$$

les solutions de son système caractéristique

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \tag{1.20}$$

Théorème 1.5. *D'après la* ***Proposition 2.6*** *voir [?, page 21], une infinité de surfaces solutions passe par chaque courbe caractéristique.*

Définition 1.11. *On appelle* ***pied de la caractéristique*** *passant par le point de coordonnées (x, y) le point d'intersection de la caractéristique et de la ligne sur laquelle les conditions initiales sont données (en général l'axe des abscisses).*

1.4 Application pour l'Équation de Transport

On donne, dans ce section, quelques résultats concernant les solution des équations de transport. On trouvera plus de détails sur les aspects mathématiques dans un ouvrage comme (Hörmonder, 1997).

Dans ce section, on donne quelques résultats sur les solutions de transport à coefficients constants.
Soit l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.21}$$

Où $k \in \mathbb{R}$ une constante.

Le système caractéristique de l'équation de transport (1.21) est donné par :

$$\begin{cases} dz = 0 \\ \\ dt = \dfrac{dx}{k} \end{cases} \tag{1.22}$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{cases} z = c_1 \\ \\ kt = x + c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = z \\ \\ c_2 = kt - x \end{cases}$$

Donc les intégrale première de (1.22) sont donner par :

$$\begin{cases} \phi(x,y,z) = z \\ \\ \varphi(x,y,z) = kt - x \end{cases}$$

Alors les solution sont définie implicitement sous la forme

$$F(u(x,y), kt - x) = Constante$$

Ce qui conduit à :

$$u(x,y) = g(kt - x) \tag{1.23}$$

où g une fonction arbitraire.

1.5 EDP non linéaire de premier ordre

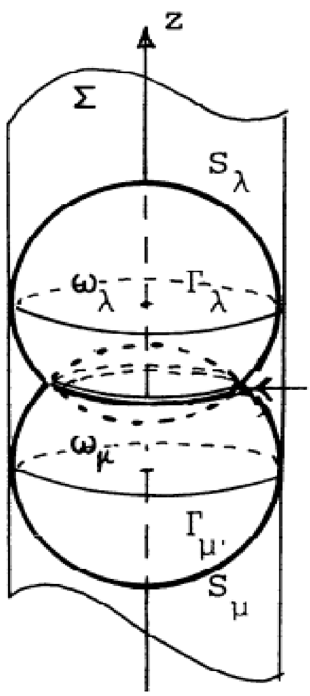
1.5.1 Enveloppes de surfaces

1.5.1.1 Enveloppes à un paramètre

On considère la famille de sphères d'équation

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + (z-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Toutes ces sphères sont centrées sur l'axe Z au point w_λ de côté λ. Elles sont toutes tangentes au cylindre Σ de rayon 1 et d'axe z_0.



Le Σ est l'enveloppes de surfaces S_λ
Quand $\mu \to \lambda$, $\Gamma_{\lambda,\mu}$ vérifié les deux équations

$$F(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$F(x,y,z,\mu) = 0$$

Donc
$$\left\{\begin{array}{lll} F(x,y,z,\lambda) & = & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda-\mu}(F(x,y,z,\lambda) - F(x,y,z,\mu) & = 0 \text{ quand} & \lambda \neq \mu \end{array}\right.$$

Si $\mu \to \lambda$, alors
$$\lim_{\mu \longrightarrow \lambda} \frac{(F(x,y,z,\lambda) - F(x,y,z,\mu)}{\lambda - \mu} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

Donc l'équation de Γ_λ sont

$$\left\{\begin{array}{lll} F(x,y,z,\lambda) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & 0 \end{array}\right.$$

L'équation de Σ s'obtient en éliminant λ entre ces deux équations. Donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} F(x,y,z,\lambda) & = & 0 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-\lambda)^2 & = & 1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & 2(z-\lambda) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} z & = & \lambda \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc Γ_λ
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} z & = & \lambda \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Et Σ est $x^2+y^2=1$

Définition 1.12. *Soit (S_λ) une famille de surfaces dépendant d'un paramètre λ d'équation*

$$F(x,y,z,\lambda) = 0$$

On suppose que F de classe C^2 et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \neq 0$$

On appelle **courbe caractéristique** de la surfaces S_λ la courbe Γ_λ si elle existe, située sur S_λ d'équation

$$\Gamma_\lambda \left\{ \begin{array}{lcl} F(x,y,z,\lambda) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) & = & 0 \end{array} \right.$$

La surface Σ engendrée par les courbes Γ_λ s'appelle l'enveloppe de la famille (S_λ). L'équation de Σ s'obtient en éliminant λ entre les équations de Γ_λ.

Remarque 1.1. *Une famille (S_λ) n'a pas toujours d'enveloppe comme :*

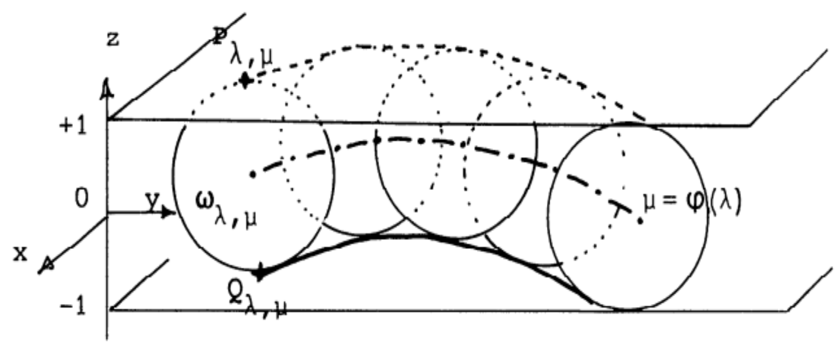
$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$$

N'ont pas d'enveloppe parce que

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -1 \neq 0, \forall x, y, z, \lambda$$

1.5.1.2 Enveloppes à deux paramètres

On considérons $(S_{\lambda,\mu}$ de rayon 1 centrées sur le plan $z = 0$ au point $w_{\lambda,\mu}$ de coordonnées $x = \lambda, y = \mu$. Elles sont toujours tangentes au plans $z = 1$ et $z = -1$ aux points $P_{\lambda,\mu}$ et $Q_{\lambda,\mu}$ coordonnées $(\lambda,\mu,1), (\lambda,\mu,-1)$.



Donc

$$\left\{ \begin{array}{lcll} F(x,y,z,\lambda,\mu) & = & (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + z^2 - 1 = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & -2(x-\lambda) = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} & = & -2(y-\mu) = & 0 \end{array} \right.$$

Définition 1.13. *Soit $(S_{\lambda,\mu})$ une famille de surfaces dépendant de deux paramètres λ, μ d'équation*

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

On suppose que F de classe C^2 et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \neq 0$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \neq 0$$

On appelle point caractéristique de $(S_{\lambda,\mu})$ un point tq :

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda, \mu) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda, \mu) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}(x, y, z, \lambda, \mu) & = & 0 \end{cases}$$

Les points caractéristiques formes l'enveloppe de la famille à deux paramètres $(S_{\lambda,\mu})$. Σ son équation s'obtient en éliminant λ et μ entre les trois équations.

Remarque 1.2. *Une famille (S_λ) n'a pas toujours d'enveloppe comme :*

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 = \mu$$

N'ont pas d'enveloppe parce que

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = -1 \neq 0, \forall x, y, z, \lambda, \mu$$

Exemple 1.11.

$$F(x, y, z, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda, \mu) & = & -2(x - \lambda) - \dfrac{\lambda}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow -4x & = & -\lambda - 4\lambda = -3\lambda \\ \Rightarrow \lambda & = & \dfrac{4}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - \dfrac{4}{3}x)^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{16}{3}x^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow \dfrac{1}{9}x^2 + y^2 + z^2 & = & \dfrac{4}{9}x^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + z^2 & = & \dfrac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

1.5.2 EDP associé à une famille de surface de deux paramètres

Soient $z = \phi(x,y), p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$ l'équation de $(S_{\lambda,\mu})$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Définition 1.14. *L'EDP associé à une famille $(S_{\lambda,\mu})$ est la relation qu'on obtient en éliminant λ, μ entre les équations*

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda,\mu) &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + p\dfrac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{cases}$$

Exemple 1.12.

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + z^2 - 1$$

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ 2(x-\lambda) + 2pz &= 0 \\ 2(y-\mu) + 2qz &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\lambda &= -pz \\ y-\mu &= -qz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z^2(1+p^2+q^2) = 1, \lambda = x + zp, \mu = y + zq$$

1.5.3 Facteur intégrant

Soit l'équation

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0 \tag{1.24}$$

On appelle Facteur intégrant de (1.24) une fonction μ tq

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu A) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu B)$$

1.5.4 Cas particulier $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial B}{\partial x}$

Théorème 1.6. *Soient A et B deux fonctions C^1 tq*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$ et $H(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} A(u,y)du + \int_{y_0}^{y} B(x_0,v)dv$
Cette fonction est solution de

$$A\frac{\partial H}{\partial y} - B\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

(Preuve : $\dfrac{\partial H}{\partial y} = B$ et $\dfrac{\partial H}{\partial x} = A$)

1.5.5 Cas général $\dfrac{\partial A}{\partial y} \neq \dfrac{\partial B}{\partial x}$

On cherche le Facteur intégrant. Soient A et B deux fonctions C^1
On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu A) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu B)$$

S'écrit aussi

$$B(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - A(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x,y)(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})$$

Donc

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mu(u,y)A(u,y)du + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0,v)B(x_0,v)dv$$

(même preuve)

1.5.6 Recherche pratique de facteur intégrant

Soit

$$B(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - A(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x,y)(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})$$

Soit U une intégrale première dépendance de μ du système caractéristique suivant :

$$\frac{dx}{B(x,y)} = \frac{-dy}{A(x,y)} = \frac{d\mu}{\mu(x,y)(\dfrac{\partial A}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial x})}$$

avec $U(x,y) = k$

Exemple 1.13. *Résoudre* $(x+y)dx + dy = 0$

On remarque

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

On cherche un facteur intégrant μ solution de

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)(x+y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y).1)$$

$$\Leftrightarrow \mu(x,y) + (x+y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Le système caractéristique

$$\frac{dx}{1} = \frac{-dy}{x+y} = \frac{d\mu}{\mu(x,y)}$$

$$\begin{cases} dx & = & \dfrac{d\mu}{\mu(x,y)} \\ \text{Donc} & x - \ln(\mu) = & 0 \\ \Leftrightarrow & \mu = e^x & \end{cases}$$

On résoud maintenant

$$e^x(x+y)dx + e^x(1)dy = 0$$

Donc

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} e^u(u+y)du + \int_{y_0}^{y} e^{x_0}dv = k$$

(L'intégration par partie)

$$e^u(u+y-1)|_{x_0}^{x} + e^{x_0} = k$$

La solution qui passe par $(0,0)$ est

$$e^x(x+y-1) = k \text{ ou } y = ke^{-x} - x + 1$$

1.5.7 résolution de $G(x,y,z,p,q) = 0$

On a $X = \dfrac{\partial G}{\partial x}, Y = \dfrac{\partial G}{\partial y}, Z = \dfrac{\partial G}{\partial z}, P = \dfrac{\partial G}{\partial p}, Q = \dfrac{\partial G}{\partial q}$

1. On cherche une intégrale première H du système caractéristique suivant :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP+qQ} = \frac{-dp}{X+pZ} = \frac{-dq}{Y+qZ}$$

2. Pour chaque valeur de λ, on calcule p, q solution de
$$\begin{cases} G(x,y,z,p,q) &= 0 \\ H(x,y,z,p,q) &= \lambda \end{cases}$$
3. z est fixé, on résout pour chaque λ l'équation
$$pdx + qdy = 0$$
Les solution sont définies implicitement $\Phi(\lambda, x, y, z) = \phi(z)$
4. On choisit x_0, celui-ci étant fixé, on détermine $\phi(z)$ avec $\Phi(\lambda, x_0, y, z) + \phi(z)$ est solution de
$$q(x_0, y, z)dy - dz = 0$$
Alors :
$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = \Phi(\lambda,x,y,z) + \phi(z) + \mu$$
intégrale premiére de $G(x,y,z,p,q) = 0$

4'. On choisit y_0, celui-ci étant fixé, on détermine $\phi(z)$ avec $\Phi(\lambda, x, y_0, z) + \phi(z)$ est solution de
$$p(x, y_0, z)dx - dz = 0$$
Alors :
$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = \Phi(\lambda,x,y,z) + \phi(z) + \mu$$
intégrale premiére de $G(x,y,z,p,q) = 0$

Exemple 1.14. *Trouvez une intégrale première complete de*
$$zpq - p - q = 0$$
$$X = \frac{\partial G}{\partial x} = 0, Y = \frac{\partial G}{\partial y} = 0, Z = \frac{\partial G}{\partial z} = pq, P = \frac{\partial G}{\partial p} = zq - 1, Q = \frac{\partial G}{\partial q} = zp - 1$$

1. On cherche une intégrale première H du système caractéristique suivant :
$$\frac{dx}{zq-1} = \frac{dy}{zp-1} = \frac{dz}{2zpq - p - q} = \frac{-dp}{p^2q} = \frac{-dq}{q^2p}$$
comme :
$$\frac{-dp}{p^2q} = \frac{-dq}{q^2p}$$
$$\begin{aligned} \frac{-dp}{p^2q} &= \frac{-dq}{q^2p} \\ \frac{-dp}{p} &= \frac{-dq}{q} \\ \ln(p) &= \ln(q) + c \\ \text{donc } \frac{p}{q} &= c \end{aligned}$$
Alors
$$H(x,y,z,p,q) = \frac{p}{q}$$

2. Pour chaque valeur de λ, on calcule p, q solution de

$$\begin{cases} zpq - p - q & = & 0 \\ \dfrac{p}{q} & = & \lambda \Longrightarrow p = \lambda q \\ \Longrightarrow z\lambda q^2 - \lambda q - q & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Longrightarrow & p = & \lambda q \\ \Longrightarrow & z\lambda q^2 - \lambda q - q = & 0 \\ \Longrightarrow & q^2(\lambda z) = & (\lambda+1)q \\ \Longrightarrow & q = \dfrac{\lambda+1}{\lambda z}, & p = \dfrac{\lambda+1}{z} \end{cases}$$

3. z est fixé, on résout pour chaque λ l'équation

$$\begin{array}{rll} & pdx + qdy = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{\lambda+1}{z}dx + \dfrac{\lambda+1}{\lambda z}dy = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{\lambda+1}{\lambda z}(\lambda dx + dy) = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (\lambda dx + dy) = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (\lambda x + y) = & k \end{array}$$

Donc $\Phi(\lambda, x, y, z) = \lambda x + y$.

4. On choisit $x_0 = 0$, celui-ci étant fixé, on détermine $\phi(z)$ avec $\Phi(\lambda, 0, y, z) + \phi(z) = y + \phi(z) = w(y, z)$ est solution de

$$q(0, y, z)dy - dz = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = & q\alpha(y,z) = & 1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = & -\alpha(y,z) = & \phi'(z) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rll} \Longleftrightarrow & \alpha(y,z) = & \dfrac{1}{q} \\ \Longleftrightarrow & \phi'(z) = & -\dfrac{1}{q} \\ \Longleftrightarrow & \phi(z) = & -\dfrac{1}{q}z \end{array}$$

Alors :

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda x + y - \frac{1}{q}z + \mu = 0$$

intégrale premiére de $G(x, y, z, p, q) = 0$ Donc

$$z = q(\lambda x + y + \mu) = \frac{1+\lambda}{\lambda z}(\lambda x + y + \mu)$$

4'. On choisit $y_0 = 0$, celui-ci étant fixé, on détermine $\phi(z)$ avec $\Phi(\lambda, x, 0, z) + \lambda x = w(x, z)$ est solution de

$$p(x, 0, z)dx - dz = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= p\alpha(x,z) = & \lambda \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\alpha(x,z) = & \phi'(z) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \iff \quad \alpha(x,z) = & \quad \frac{\lambda}{p} \\ \iff \quad \phi'(z) = & \quad -\frac{\lambda}{p} \\ \iff \quad \phi'(z) = & \quad -\frac{\lambda}{p} \\ \iff \quad \phi'(z) = & \quad -\frac{\lambda z}{\lambda + 1} \\ \iff \quad \phi(z) = & \quad -\frac{\lambda z^2}{2(\lambda + 1)} \end{aligned}$$

Alors :

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda x + y - \frac{\lambda z^2}{2(\lambda + 1)} + \mu = 0$$

intégrale premiére de $G(x, y, z, p, q) = 0$

Chapitre 2

EDP linéaires du second ordre

2.1 Équation aux dérivée partielle du second ordre

Définition 2.1. *On appelle E.D.P linéaire d'ordre inférieure ou égale à 2 dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *et d'inconnue*

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

une équation de type

$$\sum_{i,j=1} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + g(x)u(x) = h(x)$$

Par convention, on supposera que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$

Avec $A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ la matrice $N \times N$ symétrique de coefficients devant les termes d'ordre 2.

2.2 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$

Définition 2.2. a, b, c *étant trois fonctions définies dans un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, et* F *une fonction définie dans un ouvert de* $\mathbb{R}^5$*, on appelle* ***équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre****,d'inconnue* u*,une équation de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.1}$$

Remarque 2.1. *Suite aux* ***Définition 2.1*** *avant la matrice* A *est définie sous cette forme :*

$$A = \begin{bmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{bmatrix}$$

alors le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$$

donc il y a deux valeur propre λ_1 et λ_2 avec :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \frac{ac - b^2}{1} \quad et \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a + c}{2}$$

2.2.1 Équation aux dérivées partielles hyperboliques

Définition 2.3. *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0 \tag{2.2}$$

*est dite **hyperbolique** dans ce domaine.*

Remarque 2.2. *Dans la **Définition 2.3**, on dit que l'équation hyperbolique si les valeurs propre sont non nulles et de même signe sauf une alors :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 < 0 &\implies ac - b^2 < 0 \\ et\ ce\ que\ donne : &\implies b^2 - ac > 0 \end{aligned}$$

Exemple 2.1 (Équation des Ondes)**.** *L'étude des vibrations d'une corde infinie, libre de toute sollicitation, consiste à étudier les variations du déplacement transversal u au cours du temps. On se donne la position u et la vitesse du déplacement transversal u au temps zéro. Le modèle correspondant s'écrit :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= f(x) \qquad donnée \\ \frac{\partial u}{\partial t} u(x, 0) &= g(x) \qquad donnée \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.2 Équation aux dérivées partielles paraboliques

Définition 2.4. *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0 \tag{2.4}$$

*est dite **parabolique** dans ce domaine.*

Remarque 2.3. *Dans la **Définition 2.4**, On dit que l'équation parabolique si une valeurs propre est nulle.*

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = 0 \Longrightarrow b^2 - ac = 0$$

Exemple 2.2 (Équation de la Chaleur)**.** *Considérons le problème physique suivant : on veut connaître la température dans une barre infinie, sans apport de chaleur et dont la température est initialement donnée. Le modèle correspondant s'écrit :*

$$\textit{trouver} \qquad u : (x, y) \longrightarrow u(x, y) \qquad \textit{telle que :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= f(x) \qquad \textit{donnée} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.3 Équation aux dérivées partielles elliptiques

Définition 2.5. *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0 \tag{2.6}$$

*est dite **elliptique** dans ce domaine.*

Remarque 2.4. *Dans la **Définition 2.5**, on dit que l'équation elliptique si les valeurs propre sont non nulles et de même signe alors :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 > 0 &\implies ac - b^2 > 0 \\ &\implies b^2 - ac < 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Exemple 2.3 (Équation de Laplace)**.** *Considérons le problème physique suivant : on veut connaitre la température dans un demi plan connaissant la température sur le bord, sachant que cette température tend vers 0 en s'éloignant de ce bord et qu'il n'y a aucun apport de chaleur. Le modèle mathématique correspondant s'écrit :*

$$\textit{trouver} \qquad u : (x, y) \longrightarrow u(x, y) \qquad \textit{telle que :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= f(x) \qquad \textit{donnée} \\ u(x, +\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 Système orthogonal

Soit fonctions $\{\phi_n(x)\}_n$ continues sur l'intervalle $[a, b]$.
Nous dirons que $\{\phi_n(x)\}_n$ est un système orthogonal sur $[a, b]$ **si et seulement si** :

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x) \; dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \neq 0 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

2.4 La constante de séparation

La dernière égalité $\dfrac{\psi''(t)}{a^2\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$ dont le première membre dépend de t seul et le second de x seul ,n'est possible que si les deux membres ne dépendent ni de t ni de x i.e sont égaux à une même constante désignons cette constante par λ.

2.5 Courbes caractéristiques

Définition 2.6. *On appelle courbes caractéristiques de (2.1) les courbes réguliers de $\mathbb{R}^2$,dont une représentation paramétrique est*

$$x = X(t), y = Y(t) \tag{2.9}$$

et telles que :

$$(X'(t))^2 c(X(t), Y(t)) - 2X'(t)Y'(t)b(X(t), Y(t)) + (Y'(t))^2 a(X(t), Y(t)) = 0 \tag{2.10}$$

Théorème 2.1. *Si la fonction a n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (2.1) sont les solutions de l'équation*

$$a(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0 \tag{2.11}$$

Théorème 2.2. *Si la fonction c n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (2.1) sont les solutions de l'équation*

$$c(x, y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b(x, y)\frac{dx}{dy} + a(x, y) = 0 \tag{2.12}$$

Théorème 2.3. *Si les fonctions a et c sont identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (2.1) sont les droites $x = Constante, y = Constante$.*

Soit $C : x = X(t), y = Y(t)$ une courbe caractéristique de (2.1).
On considère un paramètre t_0 tel que, au voisinage V_{t_0} de t_0 :

$$a(X(t), Y(t)) \neq 0$$

Si X' s'annulait dans V_{t_0}, alors, d'après la définition 2.6 d'une courbe caractéristique, on devrait avoir $a(X(t_0), Y(t_0))(Y'(t_0))^2 = 0$ et donc $Y'(t_0)$,ce qui entre en contradiction avec la régularité de la courbe caractéristique. Par suite, dans un domaine ou a ne s'annule pas on a :

$$X'(t) \neq 0$$

La tangente à C n'est donc pas verticale : C peut être assimilée à la courbe représentative d'une fonction $y' = g(x)$:

$$\begin{cases} x = X(t) \\ y = g(x) = Y(t) \end{cases}$$

Par suite :

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{Y'(t)}{X'(t)} \tag{2.13}$$

En divisant la relation (2.10) par $(x'_c(t))^2$,on obtient :

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0 \tag{2.14}$$

On démontrer de même les deux autres théorèmes. On voit que la recherche de caractéristiques (dans les cas non triviaux, i.e. $a \neq 0$) se ramène à la résolution d'un problème du second ordre en $\dfrac{dy}{dx}$. L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant réduit $b^2 - ac$, qui caractérise la nature de l'équation aux dérivées partielles.
Ainsi, dans le cas hyperbolique, il existe deux caractéristiques réelles, dans le cas parabolique une caractéristique réelle et dans le cas elliptique deux caractéristiques complexes conjuguées :

$$\textit{pour} \qquad a \neq 0, \qquad \begin{cases} b^2 - ac > 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\[2ex] b^2 - ac = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \\[2ex] b^2 - ac < 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm i\dfrac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \end{cases} \tag{2.15}$$

2.5.1 L'équation hyperboliques

Étant donnée| une **équation hyperbolique** $(2.1)_{\mathcal{H}}$, les caractéristiques sont les solutions de (2.15) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}$$

Après intégration, on obtient les courbes caractéristiques sous forme implicite :

$$\varphi_i(x,y) = C_i \quad , \qquad i = 1,2$$

où les $C_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Exemple 2.4. *On considère l'équation :*

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$$

où $x, y \in \mathbb{R}^*$ et C est une constante réelle. Pour cette équation :

$$b^2 - ac = x^2 y^2$$

Cette équation est donc hyperbolique en dehors des axes de coordonnées.
Les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = x^2$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad et \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ou encore :

$$xdx = \pm ydy$$

Ce sont donc les courbes

$$x^2 \pm y^2 = Constante$$

2.5.2 L'équation paraboliques

Étant donnée| une **équation Parabolique** $(2.1)_{\mathcal{P}}$, les caractéristiques sont les solutions de (2.15) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Après intégration, on obtient une courbe caractéristique sous forme implicite :

$$\varphi(x, y) = C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exemple 2.5. *Soit l'équation :*

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.16}$$

On a :

$$b^2 - ac = 0$$

L'équation est parabolique, elle y admet une famille de courbes caractéristiques définies par :

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

C'est à dire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x}$$

D'où :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Après intégration, on obtient :

$$\ln(y) = \ln(x) + c \Longleftrightarrow y = C.x$$

Donc :

$$\frac{y}{x} = Constante$$

2.5.3 L'équation elliptiques

Étant donnée| une **équation Elliptique** $(2.1)_{\mathcal{E}}$, les caractéristiques sont les solutions de (2.15) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ac-b^2}{a^2}}$$

soient $\varphi_1(x,y) = Constante$, et $\varphi_2(x,y) = Constante$, une forme implicite des courbes caractéristiques. φ_1 et φ_2 sont complexes conjuguées.

Exemple 2.6. *Soit l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.17}$$

Pour cette équation on a :

$$b^2 - ac = -e^{2x}$$

Donc cette équation est elliptique.
Alors les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^{2x} = 0$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \pm ie^x$$

Où encore :

$$dy = \pm i e^x dx$$

D'où les courbes sont :

$$y \pm i e^x = Constante$$

2.6 Réduction à la forme standard du second ordre

2.6.1 Changement de variables

Proposition 2.1. *Le caractère hyperbolique, parabolique, ou elliptique d'une équation aux dérivées partielles du second ordre ne dépend pas du système de coordonnées choisi.*

On considère le changement de variables $(X(x,y), Y(x,y))$ supposé tel que le Jacobien J ne s'annule pas :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0 \tag{2.18}$$

On pose $u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y)$, par dérivation composée (voir 1.1) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 \\
&+ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\
&+ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} \\
&+ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad =$$
$$A(x,y)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} + C(x,y)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} \quad + \quad \widetilde{F}\left(X, Y, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right)$$

où on a posé :

$$\widetilde{F}\left(X, Y, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \quad = \quad 2b(x,y)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+a(x,y)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) \quad + \quad c(x,y)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= a(x,y)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 \\
B(x,y) &= a(x,y)\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + b(x,y)\left\{\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right\} + c(x,y)\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} \\
C(x,y) &= a(x,y)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$B^2(X,Y) - A(X,Y)C(X,Y) = J^2\left(b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)\right)$$
$$\textit{avec} \quad J^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} \tag{2.19}$$

comme $J \neq 0$, on voit que le signe de la quantité $B^2 - AC$ donnant le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique est indépendant du jeu de variables retenu.

On va maintenant voir que les courbes caractéristiques permettent de définir un changement de variable conduisant à une forme simple de l'équation aux dérivées partielles (forme dite *standard*) ou certains termes parmi A, B ou C ont été annulés.

2.6.2 Formes standard de l'équation hyperboliques

Théorème 2.4. *Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$ et $\varphi_2(x,y) = C_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique $(2.1)_{\mathcal{H}}$.*
En posant :

$$\begin{cases} X = \varphi_1(x,y) \\ Y = \varphi_2(x,y) \end{cases} \quad \textit{et} \quad u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y) \tag{2.20}$$

Cette équation se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = G\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}, \widetilde{u}, X, Y\right) \tag{2.21}$$

En posant ensuite :

$$\begin{cases} \widehat{X} = X + Y \\ \widehat{Y} = X - Y \end{cases} \qquad et \quad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \tag{2.22}$$

Elle se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} = H\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}, \widehat{u}, \widehat{X}, \widehat{Y}\right) \tag{2.23}$$

Ce sont les ***deux formes standards d'une EDP hyperbolique****.*

Démonstration. Si $a = c = 0$, on a déjà la première forme standard. Si $a \neq 0$, alors, en injectant (2.11) dans **Proposition 2.1**, et en remarquant que :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}}$$

on voit que le choix $X = \varphi_1(x,y)$ conduit à annuler $A(X,Y)$. Si besoin est, on peut également annuler C en posant $Y = \varphi_2(x,y)$ (si c est nul, on garde $Y = y$). Pour la suite, par dérivation composée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \end{aligned}$$

Et, de même :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] \\
&= \frac{\partial \widehat{X}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \widehat{X}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] + \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \widehat{Y}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \widehat{X}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{Y}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}
\end{aligned}
$$

2.6.3 Formes standard de l'équations paraboliques

Théorème 2.5. *On pose : $X = \varphi(x, y)$. Si Y est une fonction indépendante de X, alors, en posant :*

$$u(x, y) = \widetilde{u}(X, Y) \tag{2.24}$$

$(2.1)_{\mathcal{P}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} = G\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}, \widetilde{u}, X, Y\right) \tag{2.25}$$

Démonstration. On suppose $a \neq 0$. Le changement de variable $X = \varphi(x, y)$ permet alors d'annuler A. Sachant que $b^2 - ac = 0$ et $b^2 - ac = J^2(B^2 - AC)$, on voit que l'on a automatiquement $B = 0$ (pour Y choisi de manière à ce que le changement de variables soit régulier). On se retrouve donc uniquement avec $C \neq 0$, ce qui correspond à la forme standard.

2.6.4 Formes standard de l'équations elliptiques

Théorème 2.6. *En posant :*

$$\begin{cases} X + iY = \varphi_1(x, y) \\ X - iY = \varphi_2(x, y) \end{cases} \quad et \quad u(x, y) = \widetilde{u}(X, Y) \tag{2.26}$$

$(2.1)_{\mathcal{E}}$ s'écrit aussi :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} = G\left(u, X, Y, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \tag{2.27}$$

Si on fait le changement :

$$\begin{cases} \widehat{X} = X + iY \\ \widehat{Y} = X - iY \end{cases} \qquad et \quad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X},\widehat{Y}) \tag{2.28}$$

$(2.1)_{\mathcal{E}}$ *s'écrit sous cette forme :*

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X} \partial \widehat{Y}} = H\left(u, \widehat{X}, \widehat{Y}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \tag{2.29}$$

Démonstration. L'équation des caractéristiques (2.11) devient, en injectant les formules de changement de variables (2.26) :

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial y}\right) \\ &+ c\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial y}\right)^2 \\ &= A - C + 2iB \end{aligned} \tag{2.30}$$

ce qui implique puisque A, B et C sont des fonctions réelles :

$$A = C \quad et \quad B = 0 \tag{2.31}$$

2.7 Application pour les équations classiques

2.8 Exemple d'une équation à coefficients variables

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.32}$$

On a : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = -\cos(x)$ et $c(x,y) = \sin^2(x)$
Donc : $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 > 0$
Alors l'équation est hyperbolique.

2.8.1 Courbes caractéristiques

D'après le Théorème (2.1) On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\cos(x) \pm 1$$

Donc :

$$dy = (-\cos(x) \pm 1)dx$$

Après intégration, on obtient :

$$C = y + \sin(x) \pm x \qquad C \in \mathbb{R} \quad \text{Une constante.}$$

Les courbes caractéristiques de cette équation sont :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = y + \sin(x) + x \\ \varphi_2(x,y) = y + \sin(x) - x \end{cases}$$

2.8.2 Forme standard

Soient $\varphi_1(x,y)$ et $\varphi_2(x,y)$ deux familles des courbes caractéristiques d'une équation (2.32).

$1^{\text{ère}}$ Cas : en posant

$$\begin{cases} X = y + \sin(x) + x \\ Y = y + \sin(x) - x \end{cases} \qquad et \qquad u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y)$$

Alors :

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \cos(x) + 1 & & \dfrac{\partial X}{\partial y} = 1 \\ & \text{et} & \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \cos(x) - 1 & & \dfrac{\partial Y}{\partial y} = 1 \end{array}$$

Par dérivation composée (voir 1.1) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = (\cos(x)+1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + (\cos(x)-1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Et de même on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((\cos(x)+1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + (\cos(x)-1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= -\sin(x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + (\cos(x)+1)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&\quad -\sin(x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} + (\cos(x)-1)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&= -\sin(x)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) + (\cos(x)+1)^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x)-1)^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} \\
&\quad +2\left(\cos^2(x)-1\right)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&= (\cos(x)+1)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x)-1)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} + 2\cos(x)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Donc on remplaçant (2.33), (2.34), (2.35) et (2.36) dans (2.32) :

$$-4\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0 \qquad (2.37)$$

$2^{\text{éme}}$ Cas : en posant

$$\begin{cases} \widehat{X} = X + Y \\ \widehat{Y} = X - Y \end{cases} \qquad et \qquad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X}, \widehat{Y})$$

Alors :

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} = 1 \qquad \frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} = 1$$

et

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = 1 \qquad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y} = -1$$

Par dérivation composée (voir 1.1) on a :

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}$$

Et on :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Alors on remplaçant (2.38) dans (2.37) :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} = 0 \qquad (2.39)$$

2.8.3 La solution

Comme :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Après intégration, on obtient :

$$\widetilde{u}(X, Y) = F(X) + G(Y)$$

Donc la solution générale de l'équation (2.32) est :

$$u(x, y) = F(y + \sin(x) + x) + G(y + \sin(x) - x)$$

où F et G étant deux fonctions arbitraires.