Série n°1 (optimisation)

Exercice 1

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

1) Calculer les dérivées directionnelles au point $(0, 0)$.

2) f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

Les applications suivantes sont-elles continues? différentiable? de classe c^1.

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

d) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 3.

Etudier la continuété, l'existance des dérivées partielles et la classe c^1 de:

$$f(x, y) = y^2 \sin \tfrac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } f(x, 0) = 0.$$

Déterminer la matrice hessiènne de f.