FICHE TD : N^{0}2

Exercice 1 :

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :

$$2\,|x\,y| \leq x^2 + y^2.$$

2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Montrer que, pour tout (x,y) de A, on a :

$$|f(x,y)| \leq 4\,\|(x,y)\|_2\,,$$

où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 2 :

Calculer les limites des fonctions suivantes en $(0,0)$, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ y = r\sin\theta & r \geq 0 \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Déduire la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Démontrer que la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy},$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

$$1. f(x,y) = e^x\cos(y), \quad 2. f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy), \quad 3. f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}.$$