# *TD2 – Analyse complexe*

Licence mathématique – L2– (2022–2023)

**Exercice 1.** *Calculer les limites suivantes :*
$a)\ \lim_{z\to(1+i)} \frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}$, $b)\ \lim_{z\to(1+i)} (\frac{z-1-i}{z^2-2z+2})^2$, $c)\ \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$,
$d)\ \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z}{z^3+1}(z-e^{\frac{\pi}{3}i})$

**Exercice 2.** *Étudier la dérivation de ces fonctions :*
$f(z) = x^2 + iy$, $h(z) = \frac{4z}{z^2+1}$, $g(z) = z^2$.

**Exercice 3.** *(résolu en cours) On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$*

1. *Montrer que :*
$$sin(z) = sin(x)ch(y) + i.cos(x)sh(y)$$
$$cos(z) = cos(x)ch(y) - i.sin(x)sh(y)$$
2. *Déterminer les constantes $a, b$ et $c$ tq $f(z) = x + ay + i.(bx + cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$*
3. *Déterminer les constantes $a, b$ tq $f(z) = cos(x)(2ch(y) + ash(y)) + i.sin(x)(2ch(y) + bsh(y))$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$*
   *Quelle est alors expression de $f$ en fonction de $z$ ?*

**Exercice 4.** *On définit $f = u + i.v$ avec*
$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$$

– *Vérifier que la fonction $u$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.*
– *Déterminer la fonction $v(x, y)$ pour être $f$ une fonction holomorphe et s'annule au point zéro.*

**Exercice 5.** *On définit $f = u + i.v$ avec*
$$u(x, y) = -ye^x cosy - xe^x siny$$
*Déterminer la fonction $v(x, y)$ pour étre $f$ une fonction holomorphe et s'annule au point zéro.*

**Exercice 6.** *On définit $f = u + i.v$ avec*
$$u(x, y) = e^{-x} xsin(y)$$
*Déterminer la fonction $v(x, y)$ pour être $f$ une fonction holomorphe et s'annule au point zéro.*