Université Ibn Khaldoun Tiaret.
Département des Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Informatique

$2^{\text{ème}}$ anné Master L.M.D.(Maths AFED)
Année universitaire : 2022-2023
Le 09-02-2023

Examen d'équations différentielles 3,

Correction détaillée avec Barème.

Exercice1 :

On considère une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec une condition non locale ,

$$ {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \text{ pour tout } t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{1}$$

$$y(0) + g(y) = y_0, \tag{2}$$

ou ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ,$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, $g : C([0, T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(**1**) **(5points)** Montrons que l'operateur solution N du probléme (1)-(2) est défini de la maniére suivante

$$N : C([0, T], \mathbb{R}) \to C([0, T], \mathbb{R})$$

$$(y)(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds$$

Assumons que y satisfie (1), ceci implique que

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

de la condition(2), un simple calcul donne

$$c_0 = g(y),$$

et

$$c_2 = \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{t}{T}(g(y) + y_T).$$

Donc on obtient l'equation (3). Inversement, il est evident que si y satisfie equation (3), alors les equations (1)-(2) sont satisfaites.

(**2**) **(5points)**

Supposons les conditions suivantes.

(H1) Il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|f(t, u) - f(t, \overline{u})| \leq k|u - \overline{u}|, \text{ pour tout } t \in J, \text{ et pour tout } u, \ \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H2) Il existe une constante $\bar{k} > 0$ telle que

$$|g(y) - g(\overline{y})| \leq \bar{k}|y - \overline{y}|, \text{ pour tout } y, \ \overline{y} \in C([0, T], \mathbb{R}).$$

Montrons en se basant sur la contraction de Banach que si les condtions (H1) et (H2) sont vérifiées et si

$$\bar{k} + \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \tag{3}$$

Alors le probleme non locale (1)-(2) admet une solution unique sur $[0,T]$.

$$\begin{aligned}
|N(x)(t)-N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))| \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\
&+|g(x)-g(y)| \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&+\frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&+k^*\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{2kT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty + k^*\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc
$$\|N(x)-N(y)\|_\infty \leq \left[\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+k^*\right]\|x-y\|_\infty.$$

En consequence N est une contraction. en vertu du theoreme du point fixe de Banach, on déduit donc N a un point fixe qui est solution is a solution du problem $(1)-(2)$.

(3) (5points)

On considére les conditions suivantes

(H3) Il existe une constante $M>0$ telle que

$$|f(t,u)| \leq M \text{ pour tout } t\in J \text{ et pour tout } u\in\mathbb{R}.$$

(H4) Il existe une constante $\bar{M}>0$ telle que

$$|g(y)| \leq \bar{M} \text{ pour tout } y\in C([0,T],\mathbb{R}).$$

Montrons en utilisant le théorème de Shaefer et en supposant les conditions (H3)-(H4) vérifiées que le problème (1)-(2) admet au moins une solution. It can be easily shown that N is continuous and completely continuous.

Now it remains to show that the set

$$\mathcal{E}=\{y\in C(J,\mathbb{R}) : y=\lambda N(y) \text{ for some } 0<\lambda<1\}$$

is bounded.

Let $y\in\mathcal{E}$, then $y=\lambda N(y)$ for some $0<\lambda<1$. Thus, for each $t\in J$ we have

$$\begin{aligned}
N(y)(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds \\
&-\lambda\left(\frac{t}{T}-1\right)g(y)+\lambda\frac{t}{T}y_T.
\end{aligned}$$

This implies by (H3) and (H4) that for each $t \in J$ we have

$$\begin{aligned}
|N(y)(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + 2M_1 + |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + 2M_1 + |y_T|.
\end{aligned}$$

Thus for every $t \in [0,T]$, we have

$$\|N(y)\|_\infty \leq \frac{2MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2M_1 + |y_T| := R.$$

This shows that the set $\mathcal{E}$ is bounded. As a consequence of Schaefer's fixed point theorem, we deduce that N has a fixed point which is a solution of the problem $(1)-(2)$.

$\square$

(4) **(5points)** On considere la condition suivante

(H5) Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ et une function $p \in C([0,T],\mathbb{R}^+)$ telle que

$$|f(t;u)| \leq p(t)\psi(|u|) \text{ pour tout } (t,u) \in [0;T] \times \mathbb{R}^+$$

Indiqueons les changements qu'on fait si on remplace la condition (H3) par la condition (H5) pour montrer que problème (1)-(2) admet au moins une solution par le point fixe de Shaefer.

Revoir surtout la derniere etape concernant les estimations a priori. une condition supplementaire qui s'ajoute.