Solutions des exercices de la fiche TD n°: 2 en topologie

Rappel:

Déf: Soient X un ensemble non vide et τ une famille de sous-ensembles de X. On dit que τ est une topologie sur X si elle satisfait les axiomes suivants :

(i) $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$

(ii) $\forall\ U, V \in \tau : U \cap V \in \tau$ (Toute intersection finie)

(iii) $\forall (U_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) d'éléments de τ, on a $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$

Définitions: - Un couple (X, τ) constitué d'un ensemble non-vide et d'une topologie τ sur X s'appelle **espace topologique**.

- Etant donné (X, τ) un espace topologique, on appelle **ouvert** de X toute partie de X appartient à τ, on appelle **fermé** de X le ~~complémentaire~~ complémentaire d'un ouvert de X.

- $\tau = \mathcal{P}(X)$ est la topologie **discrète**.

- $\tau = \{\emptyset, X\}$ est la topologie **grossière**.

- Soient τ_1 et τ_2 deux topologies de X, on dit que τ_1 est **plus fine** que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$.

- On appelle **voisinage** d'un point x de X, toute partie V de X qui contient un ouvert, lequel contient x, on le note $V(x)$

- On appelle **voisinage** d'une partie A de X, toute partie V de X qui contient un ouvert, lequel contient A, on le note $V(A)$.

- On appelle **système fondamental de voisinages** d'un élément x de X, toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinage de x telle que

$$\forall\ V \in V(x),\ \exists\ W \in \mathcal{B}(x) : W \subset V.$$

- On appelle base pour la topologie τ de X, toute famille $\mathcal{B}$ d'ouverts de X tel que tout ouvert de X puisse s'écrire comme une réunion d'ouverts qui appartiennent tous à $\mathcal{B}$. Autrement dit, $\mathcal{B}$ est une base pour τ si : $\forall\, O \in \tau$, $\exists\, (U_i)_{i \in I}$ avec $U_i \in \mathcal{B}\ (\forall i \in I)$, tel que $O = \bigcup_{i \in I} U_i$.

- Soit A une partie de X. On appelle fermeture de A, le plus petit fermé de X contenant A, autrement dit $\boxed{Fer(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } X \\ F \supset A}} F}$

- Soient A une partie de X et x un point de X, on dit que x est un point adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A : c-à-d : si

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A \neq \emptyset.$$

- On définit l'adhérence de A, que l'on note $\overline{A}$, l'ensemble de tous les points adhérents à A.

- L'adhérence de toute partie de X coïncide avec sa fermeture.
- Une partie A de X est fermée ssi $A = \overline{A}$.
- Soient A une partie de X et x un point de X. On dit x est un point d'accumulation de A si : $\forall\, V \in \mathcal{V}(x) : (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
- Soit A une partie de X. On appelle point isolé de A, tout point de A qui n'est pas d'accumulation.

- Soit A une partie de X. On appelle intérieur de A, que l'on note $\mathring{A}$ le plus grand ouvert de X qui est contenu dans A. Autrement dit :

$$\boxed{\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \in \tau \\ O \subset A}} O}$$

- Une partie A de X est un ouvert ssi $\mathring{A} = A$.
- On appelle extérieur de A, la partie $\mathring{\complement_X A}$.
- On appelle Frontière de A, que l'on note $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

- Soit A une partie de X. On dit que A est dense si $\overset{\circ}{\overline{A}} \neq \emptyset$.

et A est partout dense si $\overline{A} = X$.

- Un espace topologique (X, τ) est dit séparé (ou de Haus-dorff)

si $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, $\exists V \in V(x)$, $\exists W \in V(y)$ telsque: $V \cap W = \emptyset$

Solution de l'exercice 1:

$X = \{a, b, c, d\}$ et $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\}$

1.1 Montrons que τ est une topologie sur X.

On vérifie les 3 axiomes d'un topologie.

1- On remarque que $\emptyset$ et X sont des éléments de τ.

2- On remarque aussi que toute intersection de deux éléments de τ est un éléments de τ: $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, $\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\}$, $\{a\} \cap \{a,c\} = \{a\}$, $\{a\} \cap \{b,d\} = \emptyset$

$\{a\} \cap \{a,b,c\} = \{a\}$, $\{a\} \cap \{a,b,d\} = \{a\}$

de cette manière, on vérifie pour tous les éléments de τ.

3- On vérifie la réunion des éléments de τ.

Comme τ possède un nombre fini d'éléments, il suffit de vérifier la réunion de deux éléments de τ, ex: $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$, $\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\}$,

$\{a\} \cup \{a,c\} = \{a,c\}$, $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\}$, $\{a\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\}$, $\{a\} \cup \{a,b,d\} = \{a,b,d\}$

et de cette manière, on vérifie pour tous les éléments de τ.

Donc τ vérifie les 3 axiomes d'une topologie, Alors τ est une topologie sur X.

1-2-

Ouverts de (X, τ)	Fermés de (X, τ)
$\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$	X, $\emptyset$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{c,d\}$, $\{b,d\}$, $\{a,c\}$, $\{d\}$, $\{c\}$.

2 - Determinons les ensembles suivants

$\overset{\circ}{\overbrace{\{b,c\}}} = \{b\}$	$\overset{\circ}{\overbrace{\{c,d\}}} = \emptyset$	$\overset{\circ}{\overbrace{\{b,c,d\}}} = \{b,d\}$	$Fr(\{b,c,d\}) = \{c\}$
$\overline{\{b,c\}} = \{b,c,d\}$	$\overline{\{c,d\}} = \{c,d\}$	$\overline{\{b,c,d\}} = \{b,c,d\}$	

Solution de l'exercice 2,

$$E =]0,+\infty[, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \theta_\alpha =]\alpha,+\infty[, \quad \tau = \emptyset \cup \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+\}.$$

1 - Montrons que τ est une topologie sur E.

1.1 - on a $\emptyset \in \tau$ et pour $\alpha = 0$, on a $E =]0,+\infty[\in \tau$

1.2 - On note A_i les éléments de τ, $i \in I$, $A_i =]\alpha_i, +\infty[$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$

$$\bigcup_{i \in I} A_i =]\inf_{i \in I}\{\alpha_i\}, +\infty[\in \tau \quad \text{car} \quad \inf_{i \in I}\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^+$$

τ est stable par réunion.

1.3 - ~~$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$~~ Soient θ_{α_1} et θ_{α_2} deux éléments de τ, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$

on a, $\theta_{\alpha_1} \cap \theta_{\alpha_2} =]\max\{\alpha_1,\alpha_2\}, +\infty[\in \tau$ car $\max\{\alpha_1,\alpha_2\} \in \mathbb{R}^+$

τ est stable par intersection finie.

donc τ est une topologie sur E.

2 - Determinons les fermés de (E,τ):

Ouverts	Fermés
$\emptyset$, $E =]0,+\infty[$, $]\alpha,+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$	$E =]0,+\infty[$, $\emptyset$, $]0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$

3 - Determinons $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ pour

$A =]0,1[$	$A =]\frac{1}{2},+\infty[$	$A = \mathbb{N}^*$
$\mathring{A} = \emptyset$	$\mathring{A} =]\frac{1}{2},+\infty[$	$\mathring{A} = \emptyset$
$\overline{A} =]0,1]$	$\overline{A} = E =]0,+\infty[$	$\overline{A} =]0,+\infty[$

4- Montrons que $(E, \mathcal{T})$ n'est pas séparé (n'est pas de Hausdorff).

$(E,\mathcal{T})$ est séparé c-à-d: $\forall x,y \in E,\ x \neq y,\ \exists V \in V(x),\ \exists W \in V(y) : V \cap W = \emptyset$.

$(E,\mathcal{T})$ n'est pas séparé c-à-d: $\exists x,y \in E,\ x \neq y,\ \forall V \in V(x),\ \forall W \in V(y) : V \cap W \neq \emptyset$.

Soient $x = 1$ et $y = 2$

les voisinages ouverts de $x=1$ sont: $]\alpha, +\infty[,\quad 0 \leq \alpha < 1$

les voisinages ouverts de $y=2$ sont: $]\beta, +\infty[,\quad 0 \leq \beta < 2$

et $\quad]\alpha, +\infty[\cap]\beta, +\infty[=]\max\{\alpha, \beta\}, +\infty[\neq \emptyset$

Donc $\forall V \in V(x)$ et $\forall W \in V(y) : V \cap W \neq \emptyset$

et Alors $(E, \mathcal{T})$ n'est pas séparé.

Solution de l'exercice 3:

$E =]0, +\infty[,\quad \mathcal{T} = \{E,\ \Theta_\alpha =]0, \alpha[,\ \alpha \in \mathbb{R}^+\}$.

1- Montrons que $\mathcal{T}$ constitue une topologie sur E.

1-1- $E \in \mathcal{T}$, et pour $\alpha = 0$, $\Theta_0 =]0,0[= \emptyset \in \mathcal{T}$.

1-2- Notons A_i les éléments de $\mathcal{T}$, $i \in I$, $A_i =]0, \alpha_i[,\ \alpha_i \in \mathbb{R}^+$

$$\bigcup_{i \in I} A_i =]0, \sup_{i\in I}\{\alpha_i\}[\in \mathcal{T},\quad \sup_{i \in I}\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^+$$

donc $\mathcal{T}$ est stable par réunion.

1-3- Soient Θ_{α_1} et Θ_{α_2} deux éléments de $\mathcal{T}$

$\Theta_{\alpha_1} =]0, \alpha_1[,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}^+,\quad \Theta_{\alpha_2} =]0, \alpha_2[,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\Theta_{\alpha_1} \cap \Theta_{\alpha_2} =]0, \min\{\alpha_1, \alpha_2\}[\in \mathcal{T}$$

donc $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.

Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.

~~Solution de l'exercice 3~~ :

2 _ Déterminons les fermés de (E, τ) :

Ouverts	Fermés
E, ϕ, $]0,\alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$	ϕ, E, $[\alpha, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$

3 _ Déterminons $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ des ensembles suivants :

$A =]0,1[$	$A = \{\frac{2}{3}\}$	$A = \mathbb{N}^*$
$\mathring{A} =]0,1[$	$\mathring{A} = \phi$	$\mathring{A} = \phi$
$\overline{A} =]0,+\infty[= E$	$\overline{A} = [\frac{2}{3}, +\infty[$	$\overline{A} = E$

Solution de l'exercice 4 : A et B deux parties d'un espace topologique (X,τ)

1 _ Montrons que si $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

On prend $x \in \overline{A}$ et on montre que $x \in \overline{B}$

Soit $\boxed{x \in \overline{A}}$ c-à-d : $\forall\ V \in V(x)$: $V \cap A \neq \phi$

c-à-d : $\forall\ V \in V(x)$: $V \cap B \supset V \cap A \neq \phi$

alors $\forall\ V \in V(x)$: $V \cap B \neq \phi$

et donc $\boxed{x \in \overline{B}}$

et ~~Aon Ainsi~~ .

Donc si $\boxed{A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}}$

2 _ Montrons que ~~si~~ $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

On remarque que $A \cap B \subset A$ ...(1)

et $A \cap B \subset B$ (2)

Appliquons la première propriété qu'on a démontré dans cet exercice à (1) et (2), on trouve $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$

ce qui nous donne $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}}$

3- Montrons que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

pour montrer cette égalité, on doit montrer que $(\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B})$ et $(\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B})$.

M.q $\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$: on a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

D'après la première propriété, on trouve :

$\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

et donc $\boxed{\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}}$

M.q. $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

On remarque que $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé car $\bar{A} \cup \bar{B}$ est la réunion de deux fermés. et $\bar{A} \cup \bar{B}$ contient $A \cup B$ (car $A \subset \bar{A}$ et $B \subset \bar{B}$)

et D'aprés la définition de la fermeture d'un ensemble, on a

$$\overline{A \cup B} = \bigcap_{\substack{F \text{ est fermé} \\ F \supset A \cup B}} F \quad ...(1)$$

Mais ($\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$), donc $\bigcap_{\substack{F \text{ est fermé} \\ F \supset A \cup B}} F \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ ...(2)

et donc $\boxed{\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}}$ (de (1) et (2))

On a montré la double inclusion, Alors $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Solution de l'exercice 5. A et B deux parties de $(X, \mathcal{T})$

Montrons que si $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

on a $\mathring{A} \subset A \subset B$

et $\mathring{B} = \bigcup_{\substack{O \subset B \\ O \text{ ouvert}}} O \supset \mathring{A}$ (de la définition de l'intérieur)

et donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

2- Montrons que $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

On montre la double inclusion, c-à-d: $\mathring{A}\cap\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$ et $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \subset \mathring{A}\cap\mathring{B}$

M.q $\mathring{A} \cap \mathring{B} \supset \overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$

on a $A \supset A\cap B$ et $B \supset A\cap B$

d'après la première question, on a: $\mathring{A} \supset \overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$ et $\mathring{B} \supset \overset{\circ}{\overline{A\cap B}}$

et donc $\boxed{\mathring{A}\cap\mathring{B} \supset \overset{\circ}{\overline{A\cap B}}}$ ..(1)

M.q $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \supset \mathring{A}\cap\mathring{B}$

On remarque que $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est un ouvert, car $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ est ~~la~~ l'intersection de deux ouverts, et $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ contenu dans $A\cap B$ car $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$.

et d'autre part $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O\subset A\cap B}} O$ par définition de l'intérieur

$$\bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O\subset A\cap B}} O \supset \mathring{A}\cap\mathring{B} \quad (\text{car } \mathring{A}\cap\mathring{B} \text{ est un ouvert contenu dans } A\cap B)$$

et donc $\boxed{\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \supset \mathring{A}\cap\mathring{B}}$

Alors $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$.

3- Montrons que $\overset{\circ}{\overline{A\cup B}} \supset \mathring{A}\cup\mathring{B}$.

Il est clair que: $A \subset A\cup B$ et $B \subset A\cup B$

et d'après la première question: $\mathring{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A\cup B}}$ et $\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A\cup B}}$

et donc $\boxed{\mathring{A}\cup\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A\cup B}}}$.