Solutions des exercices de la fiche TD n°1 en topologie

Rappel: - $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance si elle vérifie les 3 propriétés :

1- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2- $d(x,y) = d(y,x)$ $\qquad x, y, z \in E$
3)- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

- $B(x_0, r) = \{x \in E \,/\, d(x, x_0) < r\}$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r

- $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E \,/\, d(x, x_0) \leq r\}$ est la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

solution de l'exercice 1: $E = \mathbb{R}^n$, soient $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

- Montrons que $d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$

- $d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad, \forall i = 1, \dots, n$ $\quad \left(\text{car } |x_i - y_i| \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n\right)$

$$\Rightarrow x_i - y_i = 0 \quad, \forall i = 1, \dots, n$$
$$\Rightarrow x_i = y_i \quad, \forall i = 1, \dots, n$$
$$\Rightarrow X = Y$$

- $d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(Y,X)$ $\quad (\text{car } |x| = |-x|)$

- $d_1(X,Z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i|$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\right) \quad (\text{car } |a+b| \leq |a| + |b|)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$$
$$\leq d_1(X,Y) + d_1(Y,Z)$$

d_1 vérifie les trois propriétés d'une distance.

- Montrons que d_∞ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

- $d_\infty(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq |x_i - y_i| \leq 0, \ \forall i = 1,\dots,n$ $\left(\begin{array}{l}\text{car on a toujours } |a| \geq 0 \\ \text{et } |a_i| \leq \max|a_i|\end{array}\right)$

$\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \ \forall i = 1,\dots,n$

$\Leftrightarrow x_i = y_i, \ \forall i = 1,\dots,n$

$\Leftrightarrow X = Y$

- $d_\infty(X,Y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i|$ (car $|x| = |-x|$)

$= d_\infty(Y,X)$

- $d_\infty(X,Z) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i|$

on a $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|, \ \forall i = 1,\dots,n$

$\Rightarrow |x_i - z_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| + \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i - z_i|, \ \forall i = 1,\dots,n$

$\Rightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| \leq d_\infty(X,Y) + d_\infty(Y,Z)$

$\Rightarrow d_\infty(X,Z) \leq d_\infty(X,Y) + d_\infty(Y,Z)$

et donc d_∞ vérifie les trois propriétés d'une distance.

2/ La représentation graphique des boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^2$ pour les deux distances d_1 et d_∞

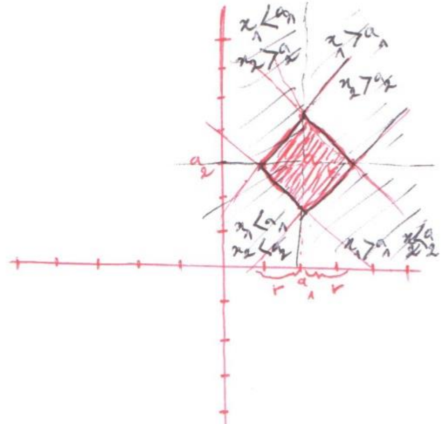
$B(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 / d_1(a,x) < r \}$
d_1

$= \{ x \in \mathbb{R}^2 / |a_1 - x_1| + |a_2 - x_2| < r \}$

On distingue quatre cas :

$\boxed{1}$ si $(a_1 - x_1) > 0$ et $(a_2 - x_2) > 0$, c.à.d : $\boxed{a_1 > x_1 \text{ et } a_2 > x_2}$

on obtient $a_1 - x_1 + a_2 - x_2 < r$, c'est l'équation du demi plan ouvert délimité par la droite d'équation $a_1 - x_1 + a_2 - x_2 = r$.



la boule ouverte est la partie rouge.

2] si $a_1 - x_1 > 0$ et $a_2 - x_2 < 0$, c-à-d : $\boxed{a_1 > x_1 \text{ et } a_2 < x_2}$

on obtient $a_1 - x_1 - a_2 + x_2 < r$, c'est l'équation du demi plan délimité par la droite d'équation $a_1 - x_1 - a_2 + x_2 = r$

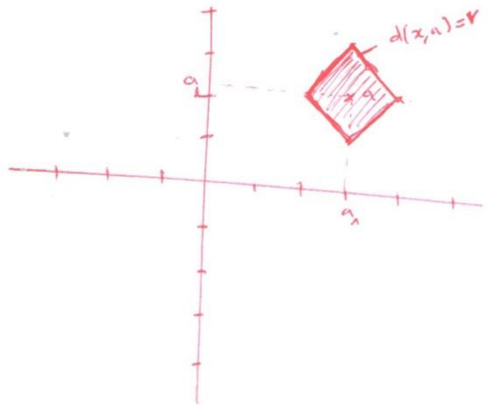
3] si $a_1 - x_1 < 0$ et $a_2 - x_2 > 0$, c-à-d : $\boxed{a_1 < x_1 \text{ et } a_2 > x_2}$

on obtient $-a_1 + x_2 + a_2 - x_2 < r$, c'est l'équation du demi plan délimité par la droite d'équation $-a_1 + x_2 + a_2 - x_2 = r$

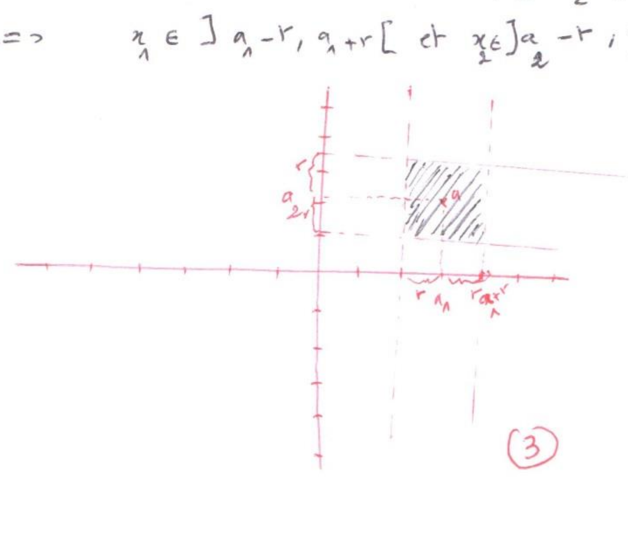
4] si $a_1 - x_1 < 0$ et $a_2 - x_2 < 0$, c-à-d : $\boxed{a_1 < x_1 \text{ et } a_2 < x_2}$

on obtient $-a_1 + x_2 - a_2 + x_2 < r$, c'est l'équation du demi plan délimité par la droite d'équation $-a_1 + x_2 - a_2 + x_2 < r$

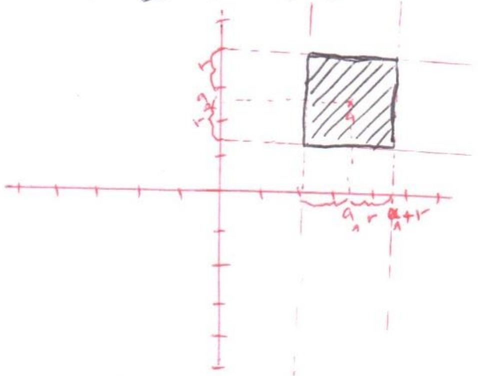
$$\overline{B}_{d_1}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ d_1(a, x) \leq r\}$$



$$B_{d_\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ d_\infty(a, x) < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ \max\{|a_1 - x_1|, |a_2 - x_2|\} < r\}$$
$$\Leftrightarrow |a_1 - x_1| < r \text{ et } |a_2 - x_2| < r$$
$$\Leftrightarrow -r < a_1 - x_1 < r \text{ et } -r < a_2 - x_2 < r$$
$$\Leftrightarrow x_1 \in]a_1 - r, a_1 + r[\text{ et } x_2 \in]a_2 - r, a_2 + r[$$



$$\overline{B}_{d_\infty}(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, d_\infty(a,x) \leq r \}$$



Solution de l'exercice 2 : $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$d_2((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1- Montrons que $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2\left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i^2 \sum_{1\leq i\leq n} b_i^2 - \left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i \right)^2 \right)$

On a :
$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$
$$= \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq n} (a_i b_j)^2 + (a_j b_i)^2 - 2(a_i b_j)(a_j b_i)$$
$$= \sum_i \sum_j a_i^2 b_j^2 + \sum_i \sum_j (a_j b_i)^2 - 2 \sum_i \sum_j a_i b_i \, a_j b_j$$
$$= \sum_i a_i^2 \sum_j b_j^2 + \sum_i b_i^2 \sum_j a_j^2 - 2 \sum_i a_i b_i \sum_j a_j b_j$$
$$= \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 + \sum_i b_i^2 \sum_i a_i^2 - 2 \sum_i a_i b_i \sum_i a_i b_i$$
$$= 2 \sum_i a_i^2 \sum b_i^2 - 2\left(\sum_i a_i b_i \right)^2 = \boxed{2\left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i^2 \sum_{1\leq i\leq n} b_i^2 - \left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i \right)^2 \right)}$$

2- Déduisons que $\forall\, a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, on a
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après la première question on a :
$$0 \leq \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2\left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i^2 \sum_{1\leq i\leq n} b_i^2 - \left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i \right)^2 \right)$$

donc $2\left(\sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 - \left(\sum_i a_i b_i \right)^2 \right) \geq 0 \Rightarrow \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 - \left(\sum_i a_i b_i \right)^2 \geq 0$

et alors :
$$\left(\sum_i a_i b_i \right)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 \Rightarrow \sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Déduisons que $\left(\sum_i |a_i+b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

On a: $|a_i+b_i|^2 = |(a_i+b_i)^2| = |a_i^2+b_i^2+2a_ib_i|$

$$\leqslant |a_i^2| + |b_i|^2 + 2|a_ib_i|$$

$$\leqslant a_i^2 + b_i^2 + 2|a_ib_i|$$

et donc $\sum_i |a_i+b_i|^2 \leqslant \sum_i a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum |a_ib_i|$

En utilisant la formule prouvée dans la deuxième question, on trouve :

$$\sum_i |a_i+b_i| \leqslant \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leqslant \left[\left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\left(\sum a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\sum_i |a_i+b_i| \leqslant \left(\left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

et alors : $\left(\sum_i |a_i+b_i|\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ... (*)

4- Montrons que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$

$X = (x_1, \dots, x_n)$
$Y = (y_1, \dots, y_n)$
$Z = (z_1, \dots, z_n)$.

- $d_2((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_i |x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum |x_i-y_i|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i-y_i|^2 = 0 \quad \forall i = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow X = Y$$

- $d_2((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \left(\sum_i |x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i |y_i-x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_2(Y,X)$

- $d_2(X,Z) = \left(\sum_i |x_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i |x_i-y_i+y_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Posons $a_i = x_i - y_i$ et $b_i = y_i - z_i$ et on applique (*), on trouve

$$d_2(X,Z) \leqslant d_2(X,Y) + d_2(Y,Z)$$

Solution de l'exercice 3 :

$d : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & , x=y \\ 1 & , x\neq y. \end{cases}$$

Montrons que d est une distance sur E : $x,y,z\in E$.

- $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ (de la définition).

- si $x=y$: $d(x,y)=0$ et $d(y,x)=0 \Rightarrow d(x,y)=d(y,x)$

si $x\neq y$, $d(x,y)=1$ et $d(y,x)=1 \Rightarrow d(x,y)=d(y,x)$

et donc $d(x,y)=d(y,x)$.

- M. q. $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

si $x=z$, on aura $d(x,z)=0$

et d'autre part $d(x,y)+d(y,z)\geqslant 0$ (car d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$)

donc $\boxed{d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)}$

si $\boxed{x\neq z}$, on aura : $d(x,z)=1$

Utilisons la demonstration par absurde, on suppose que dans ce cas on a $d(x,z) > d(x,y)+d(y,z)$ .... $(*)$

d'un côté, on a : $d(x,z)=1$

et d'un autre côté : $d(x,y)+d(y,z)$ peut avoir 3 valeurs $(0,1,2)$ mais pour que l'inégalité $(*)$ soit vérifiée, la seule valeur que $d(x,y)+d(y,z)$ doit prendre est 0, c-à-d. $1>0$

$d(x,y)+d(y,z)=0 \Rightarrow d(x,y)=0$ et $d(y,z)=0$ (car d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow x=y$ et $y=z$

$\Rightarrow x=z$

Mais, on est dans le cas où $\boxed{x\neq z}$ et donc notre supposition est fausse, ce qui prouve que

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Solution de l'exercice4 : $d' : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$d' = \min(1, d)$ où d est une distance sur E.

1/ Montrons que d' est une distance sur E, $x, y, z \in E$.

- $d'(x,y) = 0 \Rightarrow \min(1, d(x,y)) = 0$

$\Rightarrow d(x,y) = 0$ (car d est une distance)

$\Rightarrow x = y$

- $d'(x,y) = \min(1, d(x,y)) = \min(1, d(y,x)) = d'(y,x)$ (car d est une distance)

- $d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$?

c.à.d. $d'(x,z) = \min(1, d(x,z)) \leq \min(1, d(x,y)) + \min(1, d(y,z))$?

~~on a $d'(x,y) + d'(y,z) = \min(1, d(x,y))$~~

* si $d(x,y) > 1$ ou $d(y,z) > 1$

Dans ce cas : $d'(x,y) = \min(1, d(x,y)) = 1$

ou $d'(y,z) = \min(1, d(y,z)) = 1$

et donc $d'(x,y) + d'(y,z) \geq 1 \geq \min(1, d(x,z)) = d'(x,z)$

Alors $\boxed{d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)}$

* si $d(x,y) \leq 1$ et $d(y,z) \leq 1$

alors $\min(1, d(x,y)) = d(x,y)$ et $\min(1, d(y,z)) = d(y,z)$

donc $d'(x,y) + d'(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (car d est une distance)

et on a $d(x,z) \geq \min(1, d(x,z))$

$\geq d'(x,z)$

et donc

$$\boxed{d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)}$$

2/ Montrons que d'' est une distance sur E.

$$d'' = \frac{d}{1+d}$$

$-$ $d''(x,y) = 0 \iff \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$ (car d est une distance)

$-$ $d''(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d''(y,x)$

$-$ M.q $d''(x,z) \leqslant d''(x,y) + d''(y,z)$

c-à-d $\dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leqslant \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \dfrac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$

On a $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (d est une distance)

et $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t}$ est une fonction croissante

Car : $\left(\dfrac{t}{1+t}\right)' = \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$

donc (*) ... $\dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leqslant \dfrac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \dfrac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$

et $1+d(x,y)+d(y,z) \geqslant 1+d(x,y)$

$$\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leqslant \frac{1}{1+d(x,y)} \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leqslant \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

et de la même manière, on montre $\dfrac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leqslant \dfrac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$

Alors (*) devient : $d''(x,z) \leqslant d''(x,y) + d''(y,z)$

3/ Montrons que $d^* = \arctan d$ est une distance sur E.

$x, y, z \in E$

- $d^*(x,y) = 0 \iff \arctan d(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$

- $d^*(x,y) = \arctan d(x,y) = \arctan d(y,x) = d(y,x)$.

- M. q $d^*(x,z) \leq d^*(x,y) + d^*(y,z)$. ... $(*)$

c-à-d. $\arctan d(x,z) \leq \arctan d(x,y) + \arctan d(y,z)$. ?

On pose : $\alpha = \arctan d(x,y) \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$\beta = \arctan d(y,z) \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$\gamma = \arctan d(x,z) \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$\left(\text{car } d(x,y) \geq 0,\ d(y,z) \geq 0,\ d(x,z) \geq 0 \right)$

$(*)$ devient $\gamma \leq \alpha + \beta$?

On distingue deux cas.

1) $\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$

Puisque $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on obtient $\gamma \leq \alpha + \beta$

2) $0 \leq \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

$tg(\alpha+\beta) \geq 0$ et on a $\boxed{tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta} \geq 0}$

~~on a~~ Il est clair que $tg\alpha \geq 0$ et $tg\beta \geq 0$, et donc $tg\alpha + tg\beta \geq 0$

ça implique que $1 - tg\alpha . tg\beta \geq 0$, ~~alors~~ $\cancel{tg\alpha . tg\beta \leq 1}$

et comme $tg\alpha . tg\beta \geq 0$, donc $1 - tg\alpha . tg\beta \leq 1$

Alors
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta} \geq tg\alpha + tg\beta = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$
(car d est une distance.)

On obtient $d(x,z) \leq tg(\alpha+\beta)$ ... $(**)$

Comme ~~t~~ $\arctan t$ est croissante sur $\mathbb{R}$, $(**)$ devient

$\boxed{\gamma = \arctan d(x,z) \leq \alpha + \beta}$

Solution de l'exercice 5:

Soient (E, d) un espace métrique et $x, y \in E$ tels que $x \neq y$

Montrons que : $\exists\, r, s \in \mathbb{R}^+$ tels que $B(x,r) \cap B(y,s) = \emptyset$

Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, alors $d(x,y) = l \neq 0$

Supposons que $\forall\, r, s \in \mathbb{R}^+$ tels que $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$

On pose $r = \frac{l}{3}$ et $s = \frac{l}{3}$

soit $z \in B(x,r) \cap B(y,s)$, donc $z \in B(x,r) \Rightarrow d(x,z) < r$

et $z \in B(y,s) \Rightarrow d(y,z) < s$

et $l = d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < r + s = \frac{2l}{3}$

$\Rightarrow l = \frac{2l}{3} \Rightarrow l = 0$

Mais $d(x,y) = l \neq 0$, donc Notre supposition est fausse.

et donc $B(x,r) \cap B(y,s) = \emptyset$