Université Ibn Khaldoun -Tiaret
Département de mathématiques

Master 1 AFED
Équations différentielles -1

Janvier 2023

EXAMEN

Questions de cours [2*pt*]

– Écrire l'énoncé du théorème de Cauchy-Peano.

Exercice 0.1 [11*pt*] *On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t)^2, & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximale au problème (1) $y : J \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.*
2. *On suppose que $y_0 = 0$. Quelle est alors la solution maximale du problème (1)?*
3. *On suppose que $y_0 \neq 0$. Notant (y, J) la solution maximale associée, montrer que soit y est strictement positive sur J, soit strictement négative sur J.*
4. *Résoudre l'équation dans le cas où $y_0 \neq 0$.*

Exercice 0.2 [7*pt*] *Soient $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ une fonction globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et y_0, z_0 deux réels. Soit y la solution maximale de*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

et z la solution maximale de

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) + \phi(t) & t > 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{3}$$

1. *Justifier le fait que les solutions maximales y et z de (2) et (3) sont globales (c'est -à- dire définies sur $\mathbb{R}_+$ tout entier).*
2. *Montrer que pour tout $t > 0$ on a*

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{Lt} \left(|y_0 - z_0| + \int_0^t |\phi(s)| ds \right),$$

où L est une constante de Lipschitz de f.