Université Ibn Khaldoun Tiaret.
Département des Mathématiques
Faculté des Mathématiques et Informatique

$1^{\text{ère}}$ anné Master L.M.D.(Maths)
Année universitaire : 2022-2023
Le 08-01-2022

Examen de Topologie et Analyse Fonctionelle

Durée 1H 30 mn

Exercice1 :

Montrer la proposition suivante :

(1) Pour que deux normes soient equivalentes dans un espace vectoriel X il faut et il suffit que la convergence dans une de ces normes entraine la convergence dans l'autre.

(2) Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues,

$$x : [0,1] \to \mathbb{R}$$

pour $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad \|x\|_1 = \left(\int_0^1 x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons, pour $n \geq 1,\ x_n(t) = t^n$.

• Montrer que $\|x_n\|_\infty = 1,\ \|x_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

•Montrer qu'il est impossible d'obtenir un encadrement du genre

$$A \leq \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} \leq B,\ \text{A et B deux constantes strictement positives.}$$

• Déduire que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice2 :

Soit $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ l'ensemble de toutes les fonctions

$$x : [0,1] \to \mathbb{R}$$

deux fois continument dérivables vérifiant $x(0) = x'(0) = 0$ on considère l'opérateur

$$\mathfrak{A} : D(\mathfrak{A}) = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$

est défini par

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x})(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t), x \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}).$$

(1) Montrer que l'operateur $\mathfrak{A}$ est fermé.

(2) on considere la suite $x_n(t) = \frac{\sin\ nt}{n^2}$, n étant un entier naturel non nul.
   - Montrer que la suite $\mathfrak{A}x_n$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$.
   - Déduire que l'operateur $\mathfrak{A}$ n'est pas borné.