Université Ibn Khaldoun Tiaret. $1^{\text{ère}}$ anné Master L.M.D.(Maths)
Département des Mathématiques Année universitaire : 2022-2023
Faculté des Mathématiques et Informatique Le 08-01-2023

Examen de Topologie et Analyse Fonctionelle

Correction détaille avec Barème

Exercice1 :

Montrons la proposition suivante :

(1) Montrons que

$$\|.\|_1 \text{ et } \|x\|_2 \text{ sont equivalentes dans un espace vectoriel } X$$

$$\Leftrightarrow \text{Convergence pour l'une entraine convergence pour l'autre.}$$

Montrons l'implication directe, pour cela supposons que les normes $\|.\|_1$ et $\|x\|_2$ sont equivalentes donc $\alpha\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \beta\|.\|_1$

$$\begin{aligned}
&\text{Convergence de } x_n \to x \text{ au sens de la norme } \|.\|_2 \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \to 0 \\
&\Rightarrow \alpha\|x_n - x\|_1 \to 0 \\
&\Rightarrow \|x_n - x\|_1 \to 0. \\
\Rightarrow\ &\text{Convergence de } x_n \to x \text{ au sens de la norme } \|.\|_1.\ \textbf{(2points)}
\end{aligned}$$

Il en est de meme pour

$$\begin{aligned}
&\text{Convergence de } x_n \to x \text{ au sens de la norme } \|.\|_1 \Rightarrow \\
&\text{Convergence de } x_n \to x \text{ au sens de la norme } \|.\|_2
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'implication reciproque.**(2 points)**
Soit x un point de X et soit x_n une suite convergent vers x au sens de la norme $\|.\|_1$ Donc d'apres la supposition x_n con verge vers x au sens de la norme $\|.\|_2$ donc , on peut trouver A et B, strictement positifs, tels que : $A\|.\|_2 \leq \|.\|_1$, et : $B\|.\|_1 \leq \|.\|_2$, ce qui prouve l'équivalence de ces normes.

(2) Soit $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues,

$$x : [0,1] \to \mathbb{R}$$

pour $x \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad \|x\|_1 = \left(\int_0^1 x^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons, pour $n \geq 1$, $x_n(t) = t^n$.

- Montrons que $\|x_n\|_\infty = 1$, $\|x_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |t^n| \\
&= 1.\textbf{(1 point)}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|x_n\|_1 &= \left(\int_0^1 (t^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left\{\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right\}_{t=0}^{t=1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad \textbf{(2 points)}.
\end{aligned}
$$

• Montrons qu'il est impossible d'obtenir un encadrement du genre

$$A \leq \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} \leq B, \text{ A et B deux constantes strictement positives.}$$

Supposons qu'un tel encadrement existe donc

$$A \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq B$$

par passage a la limite on a

$$A \leq 0 \leq B$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $A > 0$. **(2points)**
•L'encadrement

$$A \leq \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} \leq B$$

s'il existait donne

$$A\|x_n\|_\infty \leq \|x_n\|_1 \leq B\|x_n\|_\infty$$

Ce qui donne que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.**(2 points)**

Exercice2 :

Soit $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ l'ensemble de toutes les fonctions

$$x : [0,1] \to \mathbb{R}$$

deux fois continument dérivables vérifiant $x(0) = x'(0) = 0$ on considère l'opérateur

$$\mathfrak{A} : D(\mathfrak{A}) = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$

est défini par

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x})(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t), x \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}).$$

(1) Montrons que l'operateur $\mathfrak{A}$ est fermé. **(4 points)**.
Soit x_n une suite telle que $(x_n, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_\mathfrak{n}) \to (x,y)$ D'apres un theoreme vu en Analyse 3 concernant la convergence des suites de fonction

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}_\mathfrak{n})(t) \to \frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) \text{ uniformément et } x \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$$

donc $x \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. de plus d'apres l'axiome T_2 de séparation de Hausdorff on deduit que $y = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ Donc $\mathfrak{A}$ est fermé.

(2) on considere la suite $x_n(t) = \frac{\sin \ nt}{n^2}$, n étant un entier naturel non nul.

- Montrons que la suite $\mathfrak{A}x_n$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}x_n(t) &= \frac{d^2 \frac{\sin \ nt}{n^2}}{dt^2} + \frac{\sin \ nt}{n^2} \\ &= -\sin nt + \frac{\sin \ nt}{n^2}\end{aligned}$$

La suite $-\sin nt$ n'a pas de limite donc la suite $\mathfrak{A}x_n(t)$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$. (2 **points**).

- Déduisons que l'opérateur $\mathfrak{A}$ n'est pas borné. La suite $\lim_{n \to +\infty} x_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \ nt}{n^2} \to 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} x_n \to 0$ Mais $\lim_{n \to +\infty} \mathfrak{A}x_n$ n'existe pas. Donc $\mathfrak{A}$ n'est pas continue en 0 comme $\mathfrak{A}$ est lineaire $\mathfrak{A}$ n'est pâs borné. (3 **points**).