Université IBN Khaldoun, Tiaret
Département de Mathématiques
Module: ANALYSE 3,
Suites et Séries de fonctions
Fiche TD 3

Exercice 1: Etudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes en précisant la fonction limite et le domaine de convergence

$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$, $g_n(x) = e^{-x^n}$.

$h_n(x) = n^2 \sin(\frac{x}{n^2})$, $k_n(x) = nx^n(1-x)^2$.

Exercice 2: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f_n(x) = \sin(n^2 x)e^{-n^2 x},$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[\alpha, 1]$.

Exercice 3: Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes:

1. $f_n(x) = x - \frac{\sin(x)}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $g_n(x) = \frac{nx^2 - x}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. $h_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x), & \text{si } x \in]0,1]; \\ 0, & \text{si x=0.} \end{cases}$

Exercice 4: Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Donner le domaine de convergence simple D de la suite de fonctions (f_n) et préciser la limite f.

2. La convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est-elle uniforme sur D?.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note par S la fonction somme de cette série.

4. Montrer que S est continue sur $]0,+\infty[$.

5. Montrer que S est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5: On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que le domaine de convergence simple de la suite de fonctions (f_n) est $D = [0,2[$.

2. La convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est-elle uniforme sur D?.

3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,1]$, $\forall a \in]0,1[$.

4. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur D.

5. La convergence de la série $\sum f_n(x)$ converge-elle normale sur D?.

Exercice 6: Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{xe^{n^2}}{1+n^2x^2e^{n^2}}, \qquad \forall x \in [0,1].$$

1 Etudier la convegence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

2 Soit $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. Calculer u_n et en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3 Que peut-on déduire de la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

4 Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

5 La convergence de $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $[0,1]$.

6 Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que S est continue sur $]0,1[$.