RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET

Faculté de mathématiques et informatique
Département de mathématiques

Espaces de Lebesgue
Notes de cours

(destiné aux étudiants de master 1 Mathématiques)(**M1**)

Dr. **Halim B.**
benali.halim@univ-tiaret.dz

*****

Espaces de Lebesgue L_p

Beaucoup d'espaces classiques de l'analyse sont constitués de fonctions mesurables et la plupart des normes importantes sur ces éspaces ont été définies par des intégrales. Les éspaces de Lebesgue sont parmi cette importante classe. Une compréhension complete de ces espaces a besoin d'une compréhension approfondie de la théorie de Lebesgue de la mesure et l'intégration. Les espaces de Lebesgue constituent donc une trés bonne échelle pour quantifier l'intégrabilité des fonctions,ont de remarquables propriétés et sont d'une importance capitale dans l'analyse fonctionnelle ainsi que ses applications.

****

<u>1^{ier} **cours**</u>

Espaces $\mathcal{L}_1, L_1$

Les résultats sont formulés pour un espace mesuré $\sigma-$ fini complet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ quelconque, mais nous sommes principalement intéressés par le cas oú X est une partie borélienne de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ (munie de la tribu des boréliens) et la mesure est la mesure de Lebesgue, et $f, g, f_0, f_1, \ldots f_n$, désignent des fonctions mesurables á valeurs dans $\mathbb{C}$, oú $\mathbb{R}$. Pour éviter des cas exceptionnels, nous étendons quelques opérations arithmétiques habituelles de $[0, \infty[$ á $[0, \infty]$ de la faÃğon naturelle. Donc $a + \infty = \infty pour$ tout $a \in [0, \infty], \infty^p = \infty pour 0 < p < \infty$, et ainsi de suite.
La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par les ouverts (et donc par les fermés) de $\mathbb{R}^n$. On peut montrer que cette tribu notée $\mathcal{B}\mathbb{R}^n$ est engendréee par les pavés :

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i], -\infty < a_i < b_i < \infty$$

0.1 Espaces $\mathcal{L}_1$ et semi-norme $\mathcal{N}_1$

On rappelle certaines classes de fonctions définies dans le cours " Mesure et Intégration ".

$$\mathcal{E} = \{s : X \to \mathcal{R}, \quad s \ \ mesurable\ simple\ \}$$

$$\mathcal{E}_+ = \{s : X \to [0, \infty], \quad s\ mesurable, simple\ positive\}$$

$$\mathcal{M}_+ = \{s : X \to \mathbb{R}, \quad f \text{ mesurable positive } \}$$

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}, \quad f \ \ mesurable\}$$

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C}, \quad f \text{ mesurable}\}$$

$$f = u + iv \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \longleftrightarrow u, v \in \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

1. Intégration dans la classe $\mathcal{E}_+$
   On définit l'intégrale d'une fonction mesurable simple positive s par

$$\int_X s d\mu = \sum_{1=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

   avec $X = \sum_{1=1}^{n} A_i, A_i \in \mathcal{T}, a_i \geq 0, i = 1 \ldots n.$

2. Intégration dans $\mathcal{M}_+$
   Si $f \in \mathcal{M}_+$, alors il existe une suite croissante $(s_n) \subset \mathcal{E}_+$ telle que $\lim s_n = f$ sur X.
   On définit l'intégrale d'une fonction mesurable positive $f$par

$$\int_X f d\mu = \sup_n \int_X s_n d\mu.$$

3. Intégration dans $\mathcal{M}$
   a) Si $f \in \mathcal{M}$, alors $f = f^+ - f^-$ avec $f^+, f^- \geq 0$ sur X sont ce qu'on appelle les parties positive et negative de f.
   On définit l'intégrale d'une fonction mesurable f par

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

   b) On dit que la fonction mesurable f est intégrable par rapport a μ (ou $\mu-$intégrable) si l'intégrale est finie i.e $\int_X |f| d\mu < \infty$.
   Une fonction peut ne pas être intégrable, et cependant avoir une intégrale (qui vaut alors nécessairement $-\infty$ ou $+\infty$). Si f admet une intégrale, elle est intégrable si et seulement si son intégrale est finie. On désigne par $\mathcal{L}_1(X, \mathcal{T}, \mu)$ (ou tout simplement $\mathcal{L}_1(\mu)$) l'ensemble des fonctions mesurables et intégrables á valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}_1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}\,(\text{ou}\,\mathbb{C}) \quad \text{mesurable} \quad / \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

   c) Semi-norme $\mathcal{N}_1$. Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Une application $\mathcal{N} : V \to \mathbb{R}$ est appelée une semi-norme sur V si elle satisfait les propriétés suivantes
      s1) $\mathcal{N}(v) \geq 0 \quad \text{pour} \quad v \in V;$
      s2) $\mathcal{N}(\lambda v) = |\lambda| \mathcal{N}(v) \quad \text{pour} \quad v \in V \quad , \lambda \in K;$
      s3) $\mathcal{N}(v + u) \leq \mathcal{N}(v) + \mathcal{N}(u) \quad \text{pour} \quad v, u \in V.$

Exercice : Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{N}$ une semi-norme sur V. Alors La semi-norme $\mathcal{N}$ est une norme si est seulement si $\mathcal{N}(x) = 0 \implies x = 0$.

Proposition 0.1 *L'ensemble $\mathcal{L}_1(\mu)$ muni des opération addition $(+)$ des fonctions et la multiplication $(.)$ d'une fonction par un scalaire est un espace véctoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'application $\mathcal{N}_1 := \|.\|_{\mathcal{L}_1(\mu)} : \mathcal{L}_1(\mu) \to \mathbb{R}_+$ définie une semi-norme sur $\mathcal{L}_1(\mu)$ avec*

$$\|f\|_{\mathcal{L}_1(\mu)} := \mathcal{N}_1(f) := \int_X |f| d\mu < \infty.$$

Preuve : Exercice.
Introduisons sur $\mathcal{L}_1(\mu)$ la relation " $\sim$ " suivante : si f et g sont deux fonctions réelles mesurables, on écrit $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p.p ., ou de maniere equivalente $f \sim g$ si est seulement si $\mathcal{N}_1(f-g) := \|f-g\|_{\mathcal{L}_1} = 0$. La relation $\sim$ définie clairement une relation d'équivalence. On note temporairement la classe de f par

$$\tilde{f} = \{h \in \mathcal{L}_1(\mu) / \quad f \sim h\}.$$

On quotiente l'espaces $\mathcal{L}_1$ par la relation d'équivalence $=$ p.p. . On obtient l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions mesurables réelles ou complexes qu'on note par $L_1(\mu)$, $L_1(X,\mu)$ ou tout court L_1. Si $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_1(\mu)$, de représentants f (resp.g) on pose :

$$\tilde{f} + \tilde{g} = f \tilde{+} g, \alpha.\tilde{f} = \tilde{\alpha f}, \quad \alpha \in \mathcal{C}$$

Les opérations $(+,.)$ sont compatibles avec la relation $\sim$, et conférent á l'ensemble $L_1(\mu)$ la structure d'espace vectoriel. L'application $\|.\|_1$ de $L_1(\mu)$ dans $\mathbb{R}_+$

$$\|.\|_{L_1} : \tilde{f} \to \|\tilde{f}\|_{L_1} := \mathcal{N}_1(f) := \|f\|_{\mathcal{L}_1(\mu)}$$

définie bien une norme sur l'espace $L_1(\mu)$.

Remarque 0.1 *Pour des raisons de simplicité on confondra dans la suite un élément $\tilde{f}$ de L_1 avec un représentant f de $\tilde{f}$, c'est à-dire avec un élément f de $\mathcal{L}_1$. On confond donc, en fait,la fonction f avec la classe d'équivalence de f. Avec cette confusion, si f et g sont des éléments de L_1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p .*

0.1.1 Convergence dans L_1

Définition 0.1 *Soit (f_n) une suite dans $L_1(\mu)$*

a) On dit que (f_n) converge vers $f \in L_1(\mu)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_1(\mu)} = 0.$$

On écrit $f_k \to f$ (L_1) (on l'appelle aussi convergence en moyenne d'ordre un).

b) On dit que (f_n) est de Cauchy dans $L_1(\mu)$ si

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{L_1(\mu)} = 0.$$

Lemme 0.1 *Soit Ω un ensemble mesurable et soient $f, g \in L_1(\Omega)$, $f_k, \in L_1(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ et $f_k \to f$ dans L_1 Alors $f_k \to g$ dans $L_1(\Omega)$ si est seulement si g est équivalente á f sur Ω.*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L_1(\Omega)} = 0 \tag{1}$$

Définition 0.2 *(convergence en mesure).Soit* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,*(f_n) *une suite de fonctions sur* Ω*, alors on dit que* f_n *converge vers* f *en mesure si*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} \mu(\{x / \quad |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \, \textit{tel que} \, \mu(\{x / \quad |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon, \forall n > N.$$

0.1.2 Conpletude

Le théorème central de ce cours est le suivant :

Théorème 0.1 *L'espace* $L_1(\mu), \|.\|_1$ *est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach).*

preuve :travail á préparer.

****

2^{iem} **cours**

Espaces $\mathcal{L}_p$ et L_p

0.2 L'espace $\mathcal{L}_p(.)$

Définition 0.3 *Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ,$1 \leq p < \infty$ et f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}, (ou\, \mathbb{C})$ mesurable.*

(1) Pour $1 \leq p < \infty$, (on a donc $|f|^p \in \mathcal{M}_+(\Omega)$. On dit que $f \in \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, T, \mu)$ si $\int |f|^p d\mu < \infty$. On pose, alors

$$\mathcal{L}_p := \mathcal{L}_p(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\,(ou\, \mathbb{C}) \quad mesurable \quad / \mathcal{N}_p(f) := \|f\|_{\mathcal{L}_p} < \infty\}.$$

avec

$$\mathcal{N}_p(f) := \|f\|_{\mathcal{L}_p} := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

(2) On dit que $f \notin \mathcal{L}_p(\mu)$ si $\int_X |f|^p d\mu = \infty$.

Pour $p = 1$ on retrouve l'espace $\mathcal{L}_1(\mu)$ défini anterieurement. Les éléments de $\mathcal{L}_p(\mu)$ sont appelés fonctions réelles (complexes) mesurables de puissance p^{iem} intégrable.

Lemme 0.2 *Si $p \in [1, \infty)$ et $a, b \geq 0$, alors*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{3}$$

Preuve Si $p = 1$, alors (3) est une égalité triviale.
Si $p > 1$, la fonction $t \to t^p$ est convexe sur $[0, \infty)$; son graphe est en dessous de la ligne de segment joingnant les deux points $(a, a^p), (b, b^p)$. On a donc

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2},$$

ce qui donne (3).

Proposition 0.2 *Pour $1 \leq p < \infty$. Chaque ensemble $\mathcal{L}_p$ est un espace véctoriel pour les opération addition $(+)$ des fonctions et la multiplication $(.)$ par un scalaire.*

Preuve : Exercice
Indication Si $1 \leq p < \infty, f \in \mathcal{L}_p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il est évident que $\lambda f \in \mathcal{L}_p$. Il s'ensuit que

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

si $f, g \in \mathcal{L}_p$, la fonction $|f + g|^p$ est intégrable et $f + g \in \mathcal{L}_p$.

0.3 Espaces L_p et convergence L_p

1.Espaces L_p
Introduisons sur $\mathcal{L}_p$ la relation suivante : si f et g sont deux fonctions réelles mesurables, on écrit $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p.p ou de manière équivalente " $f \sim g$ si et seulement si $f - g \in H$ oú $H = \{f \in \mathcal{L}_p / \quad \mathcal{N}_p(f) = 0\}$. La relation $\sim$ définie clairement une relation d'équivalence et on note la classe de f par $\tilde{f}$. On quotiente l'éspaces $\mathcal{L}_p$ par la relation d'equivalence ($=$ p.p .) . L'espace véctoriel des classes d'equivalence de fonctions mesurables réelles ou complexes est noté par $L_p(\mu) = \mathcal{L}_p / \sim := \mathcal{L}_p / H$.
Si $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_p(\mu)$, de représentants f (resp.g) On pose :

$$\tilde{f} + \tilde{g} = f \tilde{+} g, \alpha.\tilde{f} = \tilde{\alpha f}, \quad \alpha \in \mathcal{C}$$

Les opérations $(+, .)$ sont compatibles avec la relation $\sim$.

Remarque 0.2 *Pour des raisons de simplicité on confondra dans la suite un élément(classe) $\tilde{f}$ de L_p avec un représentant f de $\tilde{f}$, c'est à-dire avec un élément f de $\mathcal{L}_p$. On confond donc, en fait,la fonction f avec la classe d'equivalence de f. Avec cette confusion, si f et g sont des éléments de L_p, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p .*

0.4 Inégalités de convexité.

0.4.1 Ensemble convexe et fonction convexe

Définition 0.4 *(ensemble convexe) Soit C un sous enseemble d'un espace vectoriel complexe V ,alors C est dit convexe si pour tout*

$$u, v \in C, \lambda u + (1 - \lambda)v \in C, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Définition 0.5 *(fonction convexe) Soit $w : V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur d'un espace vectoriel complexe V á valeurs réelle ,alors w est dite convexe si pour tout*

$$u, v \in V, w(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda w(u) + (1 - \lambda)w(v) \forall \lambda \in [0, 1].$$

Exemples : Les fonctions $-\ln$, exp, $x^p, p \geq 1$ définies sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions convexes.

0.4.2 Inégalité de jensen

Théorème 0.2 *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace de probabilité (espace mesuré avec $\mu(X) = 1$),$f \in L_1(X, \mu; \mathbb{R})$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe,alors*

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\phi o f) d\mu.$$

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ et $\phi(x) = exp(x)$, alors $exp(\int_X f d\mu) \leq \int_X \exp(f) d\mu$._ Si $x = \{a_1, a_2, \dots a_n\}, \mu(a_i) = \frac{1}{n}, f(a_i) = x_i$.

0.4.3 Inégalité de Hôlder

L'inégalité de Hölder et ses corollaires dans la théorie des espaces L_p sont d'une façon où d'une autre utilisés dans les preuves d'importantes inégalités liées aux espaces L_p.

Définition 0.6 *(conjugués au sens de de Hôlder) Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ sont dit conjugés au sens de Hôlder si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En particulier $p = 2$ est le conjugé de lui même ,$(1, \infty)$ sont conjugés .*

Lemme 0.3 ***(Inégalité de Young)*** *Soit $p, q \geq 1$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{4}$$

Preuve : La fonction $\exp : t \to \exp(t)$ est convexe(de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.) On a donc pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in [0, 1]$.

$$\exp(\alpha t + (1-\alpha)s) \leq \alpha \exp(t) + (1-\alpha)\exp(s).$$

Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $\alpha = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1-\alpha) = \frac{1}{q}$,) $t = p\ln(a)$ et $s = q\ln(b)$. On obtient $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Théorème 0.3 ***(Inégalité de Hölder)***
Soient Ω un ensemble mesurable, et $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}_q(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$, alors

$$\|fg\|_{\mathcal{L}_1(\Omega)} := \int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \|g\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)}, \tag{5}$$

Preuve : Si $1 \leq p, q < \infty$, on applique le lemme 0.3 avec $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}}$ et $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)}}$, on a

$$\begin{aligned} ab &= \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\|g\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)}} \\ &\leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(\Omega)}} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{\mathcal{L}_q(\Omega)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\|g\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)}}dx &\leq \frac{1}{p}\int \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(\Omega)}}dx + \frac{1}{q}\int \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{\mathcal{L}_q(\Omega)}}dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5).

Nota : Le même résultat est vrai avec L_p, L_q au lieu de $\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_q$.

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{6}$$

0.4.4 Inégalités de Minkowsky.

Théorème 0.4 ***(Inégalité de Minkowsky)*** *Soit Ω un ensemble mesurable , $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Alors*

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}. \tag{7}$$

Preuve : 1. Si $p = 1$:

$$\|f+g\|_{\updownarrow_L(\Omega)} = \int_\Omega |f+g|dx \leq \int_\Omega |f|dx + \int_\Omega |g|dx = \|f\|_{\mathcal{L}_1(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}_1(\Omega)}.$$

2. Si $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f+g|^p dx &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1}dx \\ &\leq \int_\Omega |f||f+g|^{p-1}dx + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1}dx. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\||f+g|^{p-1}\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)} + \|g\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\||f+g|^{p-1}\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)}$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et donc $q=\frac{p}{p-1}$, alors :

$$\begin{aligned}\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{\mathcal{L}_q(\Omega)} &= \Big(\int_\Omega |f+g|^{p-1\frac{p}{p-1}}dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \Big(\Big(\int_\Omega |f+g|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}dx\Big)^{p-1}\\ &= \big\|f+g\big\|^{p-1}_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega |f+g|^p dx \leq \big\|f+g\big\|^{p-1}_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\Big(\big\|f\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}+\big\|g\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\Big),$$

on déduit que :

$$\big\|f+g\big\|^{p}_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq \big\|f+g\big\|^{p-1}_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\Big(\big\|f\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}+\big\|g\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\Big).$$

Et par conséquent

$$\big\|f+g\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq \big\|f\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}+\big\|g\big\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}.$$

Nota : Il est clair que le lemme est vrai avec L_p au lieu de $\mathcal{L}_p$.

$$\big\|f+g\big\|_{L_p(\Omega)} \leq \big\|f\big\|_{L_p(\Omega)}+\big\|g\big\|_{L_p(\Omega)}. \tag{8}$$

2.Semi-norme $\|.\|_{\mathcal{L}_p} := \mathcal{N}_p(.)$ et norme $\|.\|_{L_p}$

Proposition 0.3 *Soient $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $1\leq p<+\infty$.*
(i1) L'application $\|.\|_{\mathcal{L}_p} := \mathcal{N}_p : f\to \|f\|_{\mathcal{L}_p}$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}_p$. Si $f\in\mathcal{L}_p$, on a

$$\mathcal{N}_p(f)=0 \Leftrightarrow f=0\, p.p..$$

(i2) L'application

$$\|.\|_{L_p} : \tilde{f}\to \|\tilde{f}\|_{L_p} := \mathcal{N}_p(f) := \|.\|_{\mathcal{L}_p}$$

définie une norme sur $L_p(\mu)$.

0.4.5 Convergence L_p

Définition 0.7 *Soit $1\leq p<\infty$ et (f_n) une suite dans $L_p(\mu)$*
a) On dit que (f_n) converge vers $f\in L_p(\mu)$ si

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L_p\mu}=0.$$

On écrit $f_k\to f$ (L_p) (on l'appelle aussi convergence en moyenne d'ordre p).

b) On dit que (f_n) *est de Cauchy dans* $L_p(\mu)$ *si*

$$\lim_{n,m} \to \infty \|f_n - f_m\|_{L_p(\mu)} = 0.$$

Lemme 0.4 *Soit* Ω*un ensemble mesurable et soient* $f, g \in L_p(\Omega), f_k, \in L_p(\Omega), k \in \mathbb{N}$ *et* $f_k \to f$ *dans* L_p *Alors* $f_k \to g$ *dans* $L_p(\Omega)$ *si est seulement si* g *est équivalente á* f *sur* Ω.

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L_p(\Omega)} = 0 \tag{9}$$

****

3^{iem} cours

Théorèmes importants

0.5 Théorèmes d'intégration (version L_1).

Théorème 0.5 ***(de Beppo Levy ou de Convergence monotone)*** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge vers* $f(x)$ *alors* f *est mesurable et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx. \tag{10}$$

preuve :exercice
On utilisera souvent une légère extension du théorème de convergence monotone,où l'on suppose seulement une convergence presque partout de la suite croissante de fonctions .

Lemme 0.5 ***(Lemme de Fatou)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *mesurable et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu. \tag{11}$$

Théorème 0.6 ***théorème de convergence dominée****. Soit* $(X;T;\mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_1, f \in \mathcal{M}$ *et* $g \in \mathcal{L}_1$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p quand* $n \to +\infty$, *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ *p.p .. On a alors* $f \in \mathcal{L}_1, \|f_n - f\|_1 \to 0,$ *quand* $n \to +\infty$ *et* $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ *quand* $n \to +\infty$.

0.5.1 Applications

Théorème 0.7 *(continuité sous le signe intégral) Soient* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,*(M, d) *un espace métrique* $t_0 \in M$ *et* $f : X \times M \to K,$ $(K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, *tels que*

- $\forall t \in M, f(.,t)$ *est mesurable*
- $\exists V \in \mathcal{V}(t_0), \exists g \in L_1(X)$ *tel que* $|f(.,t)| \leq g$ *(p.p)*
- *l'application* $t \to f(x,.)(t) = f(x,t)$ *est continue en* t_0 *pour presque tout* $x \in X$. *Alors la fonction* H *définie par*

$$H(t) = \int_X f(x;t)d\mu(x)$$

est continue en t_0.

preuve : Il suffit de prouver la continuité séquentielle i.e $\lim_{n\to\infty} H(t_n) = H(t_0)$.
Soit une suite $t_n \subset V$ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ et appliquons le théorème de convergence dominée á la suite $f_n(x) = f(x, t_n)$.

Théorème 0.8 *(dérivabilité sous le signe intégral) Soient* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* M *un ouvert de de* $\mathbb{R}$ *et* $f : X \times M \to K$, *(*$K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), tels que*

- $\forall t \in M, f(.,t)\, est\, L_1$,
- *pour presque tout* $x \in X$ $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ *existe sur* M,
- $\exists g \in L_1(X) \forall t \in M, \dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t) \leq g \quad (p.p)$, *Alors la fonction* H, *définie de* M *dans* K *par :* $H(t) = \int_X f(x;t) d\mu(x)$ *est dérivable sur* M *et*

$$\forall t \in M \quad H'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x)$$

0.6 Completude

Le théorème central est le suivant :

Théorème 0.9 *(completude(completness)) Soit* $1 \leq p < \infty$. *L'espace* $L_p(\mu)$ *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p < \infty$.

0.7 Exercices avec indications.

Exercice 1. Soient $(\Omega; T; \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$; on pose, pour tout $x \in \Omega$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Sol On applique le théorème de convergence monotone á la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{r=0}^{r=n} f_r.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{r=0}^{r=n} \int f_r \, d\mu = \int g_n \, d\mu \to \int f d\mu.$$

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables á valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $g \leq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où g est une fonction intégrable. Alors

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu. \tag{12}$$

Indication : On applique le lemme de Fatou á la suite de fonctions $f_n - g$.
Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables á valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ oú g est intégrable. Alors

$$\int_\Omega \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu. \tag{13}$$

Indication : Observons que $g \geq f_n$ est équivalente á $-g \leq -f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\liminf(-f_n) = -\limsup f_n$, ainsi les hypothŝes du lemme de Fatou sont satisfaites.
Exercice 4. Soit f une fonction mesurable sur X et supposons qu'il existe une suite $f_j \in$ de fonctions intégrables telle que $f_j \to f$ $\mu-$ p.p. et $\overline{\lim}_j \|f_j\|_1 < \infty$. Alors

1) f est intégrable.
2) $\|f\|_1 \leq \overline{\lim}_j \|f_j\|_1$.

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \geq 0$ une suite de fonctions mesurables á valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $f_n \to f$ (p.p)surΩ et $\int_\Omega f_0 d\mu < \infty$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu. \tag{14}$$

Indication : Appliquer le théorème de convergence monotone á la suite $(f_0 - f_n)$.
Exercice 6. Soit $f_j \in$ une suite de fonctions mesurables positives telle que $f_j \to f$ (p.p.) sur X. On suppose qu'il existe une constante $C \geq 0$telle que $\int_X f_n d\mu \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\int_X f_n d\mu \leq C$

1) f est mesurable positive.
2) $\int_X f d\mu \leq C$.

Exercice 7. On pose $f_n(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n, t \in]0,1[$,prouvez que

$$\int_{]0,1[} \sum_1^{\infty} f_n d\mu \neq \sum_1^{\infty} \int_{]0,1[} f_n d\mu$$

Exercice 8. Soient $0 < a < b < \infty, x \in (0,b)$ $f \geq 0, 0 < \int_0^b f^p(x)dx < \infty$.

1) calculer $\int_0^x t^{\frac{-1}{p}}(t)dt$.
2) Montrer que $\int_0^b f(t)dt \leq p'^{1/p'} x^{1/p'^2} \left(\int_0^x t^{1/p'} f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q, \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}_p, g \in \mathcal{L}_q$, et r tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$,

1. Etablir l'inégalité pour tous $A, B > 0$
$$\big(AB\big)^r \leq \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{15}$$
2. Etablir l'inégalité
$$\|fg\|_{\mathcal{L}_r} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p} \|g\|_{\mathcal{L}_q}$$
3. Déduire que $fg \in \mathcal{L}_r$.

Sol. 1). Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (4) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$\big(AB\big)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q.$$

2). Appliquer l'inégalité de Hôlder.

Exercice 10. Soit $p_i \in]1, \infty[$, $i = 1, 2, ..., k$, et $1 < r < \infty$ tel que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ (les p_i sont dits r conjugués), $f_i \in L_{p_i}(X)$, alors

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L_r(\Omega) \ et \ \big\|f\big\|_{L_r(X)} \leq \prod_{i=1}^{k} \big\|f_i\big\|_{L_{p_i}(X)} \tag{16}$$

Solution : Par recurrence

Exercice 11. Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., m\}$, $1 \leq p < \infty$, alors

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} f_k\Big\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \Big\|f_k\Big\|_{L_p(\Omega)} \tag{17}$$

indication : Par recurrence.

Exercice 12. Soit $f_n = 1_{[n,n+1]}$ une suite de fonctions ,montrer que

1. $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
2. $f_n \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, $\quad \lim \|f_n\|_{L_p}$

Exercice 13. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $p_1, p_2, \geq 1$. avec $p_1 \leq p_2$. Soit $A = \{|f| \geq 1|\}$. Montrer que pour tout$p \in [p_1, p_2]$.

1. $(|f|1_A)^p \leq |f|^{p_2}$ et $(|f|1_{A^c})^p \leq |f|^{p_1}$
2. Déduire l'inclusion

$$\mathcal{L}_{p_1} \cap \mathcal{L}_{p_2} \subset \mathcal{L}_p.$$