Série d'exercices n°3 (optimisation)

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = e^{2x-\cos x}$.

Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln(\ln x)$.

1) Montrer que f est concave sur $]1, +\infty[$

2) En déduire: $\forall a > b > 1$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{\ln a \ln b}$.

3) Soient p, q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ (utiliser $x \longmapsto \ln x$).

Exercice 3.

Soit f une fonction convexe sur $I \subset \mathbb{R}$ et soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$.

Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0.$

2) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit N une norme d'un espace vectoriel E. Montrer que N est convexe.

Exercice 5.

Soit la fonction indicatrice d'un ensemble K définie par

$$1_K = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in K \\ +\infty \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que 1_K est convexe si K est convexe.

Exercice 6.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}_*^+$ la fonction

$$F(\lambda) = \frac{f(u + \lambda v) - f(u)}{\lambda}, \; u,v \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que: Si f est convexe alors F est croissante.