Université IBN Khaldoun, Tiaret

Département de Mathématiques

Module : Topologie

Fiche TD 1.

Exercice1 : Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère d_1 et d_∞ les applications de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$. définies par : $\forall\ X = (x_1, x_2, ...x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_1(X, Y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$,

$d_\infty(X, Y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$.

1. Montrer que d_1 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.

2. On prend $n = 2$. Représenter graphiquement les boules ouvertes et les boules fermées de $\mathbb{R}^n$ relativement à chacune de ces deux distances.

Exercice2 : (La distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$d_2((x_1, ..., x_n); (y_1, ..., y_n)) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}\ \forall\ (x_1, x_2, ...x_n),\ (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

1. Montrer que pour tous $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2(\sum_{1 \le i \le n} a_i^2 \sum_{1 \le i \le n} b_i^2 - (\sum_{1 \le i \le n} a_i b_i)^2)$$

(c'est l'identité de Lagrange).

2. En déduire que pour tous $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{1 \le i \le n} a_i b_i \le (\sum_{1 \le i \le n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{1 \le i \le n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

(c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

3. En déduire que pour tous $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\sum_{1 \le i \le n} |a_i + b_i|^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{1 \le i \le n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{1 \le i \le n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

(c'est l'inégalité de Minkowski).

4. Montrer que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice3 :(La distance discrète d'un ensemble).

Soient E un ensemble non vide et $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$, l'application définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{x=y ;} \\ 1, & x \neq \text{y.} \end{cases}$$

-Montrer que d est une distance sur E.

Exercice4 : Soit (E,d) un espace métrique et soient d, d' et d'' les applications de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ données par :

$d = \min(1,d)$,

$d' = \frac{d}{d+1}$,

$d'' = \arctan d$.

- Montrer que d, d' et d'' sont des distances sur E.

Exercice5 : Soit (E,d) un espace métrique.

-Montrer que pour tous $(x,y) \in E$, avec $x \neq y$, il existe deux réels strictement positifs r et s tels que :

$$B(x,r) \cap B(y,s) = \emptyset$$