Université IBN Khaldoun, Tiaret

Département de Mathématiques

Module : Topologie

Fiche TD 2.

Exercice1 : Soit $X = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à 4 éléments et soit τ la famille de $\mathcal{P}(X)$ suivante : $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur X, puis donner les ouverts et les fermés de l'espace topologique (X, τ).

2. Déterminer les ensembles suivants :

$\overset{\circ}{\widehat{\{b, c\}}}$, $\overline{\{b, c\}}$, $\overset{\circ}{\widehat{\{c, d\}}}$, $\overline{\{c, d\}}$, $\overset{\circ}{\widehat{\{b, c, d\}}}$, $\overline{\{b, c, d\}}$ et $Fr(\{b, c, d\})$.

Exercice2 :

On pose $E =]0, +\infty[$ et pour tout réel positif α, on pose $\theta_\alpha =]\alpha, +\infty[\subset E$. On considère τ la famille de parties de E donnée par :

$\tau = \emptyset \cup \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+\}$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.

2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).

3. Donner (sans démonstration) $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$A =]0, 1[$, $A =]\frac{1}{2}, +\infty[$, $A = \mathbb{N}$.

4. Montrer que (E, τ) n'est pas séparé.

Exercice3 :

On pose $E =]0, +\infty[$ et $\tau = \{E, \theta_\alpha =]0, \alpha[, \alpha \in \mathbb{R}^+\}$

1. Montrer que τ constitue une topologie sur E.

2. Déterminer les fermés de l'espace topologique (E, τ).

3. Donner (sans démonstration) $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants :

$A =]0, 1[$, $A = \{\frac{2}{3}\}$, $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice4 : Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X, τ). Montrer les propriétés suivantes :

1.$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

2.$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

3.$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice5 : Soient A et B deux parties d'un espace topologique (X, τ). Montrer les propriétés suivantes :

1.$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2.$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

3.$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.