Université IBN Khaldoun, Tiaret
Département de Mathématiques
Module: Logiques Mathématiques,
Exercices de TD

1 Raisonnement

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 3. Montrer que si n est un entier naturel impair alors l'entier $3n+7$ est pair.

Exercice 4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer $\forall \varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon \Rightarrow a = 0$.

Exercice 6. Soit la suite (v_n), $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$.

Démontrer que la proposition P_n: $3 \leq v_n \leq 10$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Ensembles et applications

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, \}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(a) $a \in E$ (b) $\{a\} \subset E$ (c) $\emptyset \subset E$.

(d) ; $a \subset E$ (e) $\emptyset \in E$ (f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 2. Décrire les ensembles suivants

L'ensemble $\{1, 3, 5, 7, ...\}$.

L'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, ...\}$.

L'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

L'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 3. Etant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

(a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

(b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

(c) $A \cap C = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

(d) $\left\{ \begin{array}{l} A \cup C = A \cup B, \\ A \cap C = A \cap B, \end{array} \right. \Leftrightarrow B = C$.

Exercice. Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = 2k$$

$$\text{et } g(k) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k}{2}, & \text{si k est pair ;} \\ \frac{(k-1)}{2}, & \text{si k est impair.} \end{array} \right.$$

(a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.

(b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$, étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

3 Calcul propositionnel et calcul des prédicats

Exercice 1. Décrire les parties de R dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

(a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$.

(b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$.

(c) $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$.

(d) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Exercice 2. Etant donné P, Q et R trois propositions, vérifier en dressant la table de vérité :

(a) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

(b) $\rceil(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow P \wedge \rceil Q$.

Exercice 3. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses:

Si l'emir Abdelkader était français alors $3 + 6 = 12$.

Soit les roses sont des animaux, soit les oiseaux volent.

Alger est en Algérie ou Madrid est en chine.

Comment vas-tu?.

Exercice 4. Construire les tables de vérité des formules suivantes:

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

$P \Rightarrow (Q \wedge P)$.

$(P \Rightarrow Q) \vee \rceil P)$.

Exercice 5. En utilisant la table de vérité, montrer que

$(P \Rightarrow Q) \nLeftrightarrow (Q \Rightarrow P)$.

$[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \Rightarrow R]$.

$[P \wedge (R \vee Q)] \Leftrightarrow [(P \wedge R) \vee (P \rceil Q)]$.

Exercice 6. Vérifier si les formules suivantes sont des tautologies

$(P \vee R)] \Leftrightarrow (R \vee P)$.

$[(P \Rightarrow R) \Rightarrow R] \Rightarrow R$.

Exercice 7. Soient les connecteurs définis dans la table de vérité suivante

P	Q	$P \leftarrow Q$	$P \uparrow Q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	V

Montrer que

1/ $\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \rceil(\alpha \leftarrow \beta)$.

2/ $\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \beta \uparrow \alpha$.

Exercice 8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.

Exprimer les négations des propositions suivantes :

(a) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0.$

(b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = 0.$

(c) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M.$

(d) $\forall x, y \in I,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$

(e) $\forall x, y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$

(f) $\forall x \in I,\ f(x) > 0 \Rightarrow x \neq 0.$

Exercice 9. Montrer que la relation de l'ordre strict $<$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est antisymétrique.

4 Bon ordre et preuve par récurrence

Exercice 1. Montrer en utilisant le principe du bon ordre que

$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2. On considère la suite définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$

En utilisant le principe du bon ordre montrer que pour tout entier naturel on a : $1 \leq u_n \leq 2$.