Université Ibn-Khaldoun de Tiaret
Département de Mathématiques
Module: Mesure et Intégration

Fiche TD N 2

Exercice 1. *Soit* $\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : -A = A\}$. *Montrer que* $\mathcal{T}$ *est une tribu sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Soit* $\mathcal{T} = \{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : 2n \in A \iff 2n+1 \in A \quad \forall n \geqslant 1\}$. *Montrer que* $\mathcal{T}$ *est une tribu sur* $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. *Soit* E, F *deux ensembles non vide et* $f : E \to F$ *une application. Soit* $\mathcal{T}_F$ *une tribu sur* F.

1. *Montrer que* $f^{-1}(\mathcal{T}_F) := \{f^{-1}(B) : \quad B \in \mathcal{T}_F\}$ *est une tribu sur* E.
2. *Soit* $\mathcal{C}$ *une collection de parties de* F. *Montrer que* $f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{C})) = \sigma_E(f^{-1}(\mathcal{C}))$

Exercice 4. *Soit* (E, τ) *un espace mesurable,* $A \subset E$

1. *Soit* $i : A \to E$ *l'injection canonique. Determiner* $i^{-1}(\tau)$.
2. *Notons* 1_A *la fonction caracteristique de* A. *Determiner* $1_A^{-1}(\tau)$

Exercice 5. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathcal{A} = \{A_i : i = 1...p\}$ *une partion d'un ensemble non vide* E. *Trouver* $\sigma(\mathcal{A})$.

Exercice 6. *Soit* E *un ensemble infini non dénombrable et* $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ *une partition de* E, *où* I *est un ensemble infini dénombrable. Déterminer* $\sigma(\mathcal{A})$

Exercice 7. *Soit* E *un ensemble non vide,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. *Montrer que*

$$\sigma_E(\mathcal{A}) = \sigma_E(\mathcal{A}^c), \text{ où } \mathcal{A}^c := \{A^c : \quad A \in \mathcal{A}\}.$$

Exercice 8. *Soient* τ_1, τ_2 *deux tribus sur* E. $\tau_1 \cup \tau_2$ *est-elle une tribu sur* E *?*
Montrer que $\sigma_E(\tau_1 \cup \tau_2) = \sigma_E(\{A \cap B : A \in \tau_1, B \in \tau_2\})$

Exercice 9. *Soit* X *un ensemble non vide.* $\mathcal{A} := \{\{a\}, a \in X\}$. *Montrer que*

$$\sigma_X(\mathcal{A}) = \{A \subset X : \quad A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}.$$

Exercice 10. *Soit* E *un ensemble non vide.*

1. *Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de* E *?*
2. *Donner une condition suffisante pour qu'elle coïncide avec* $\mathcal{P}(E)$.