**Université Ibn-Khaldoun de Tiaret**
**Département de Mathématiques**
**Module: Mesure et Intégration**

---

**Fiche TD** $N°$ **: 3**

**Exercice 1.** 1. *Montrer que l'ensemble* $\left\{x \in \mathbb{R} : \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^*, |x-n| < \frac{1}{n}\right\}$ *est un borélien de* $\mathbb{R}$.

2. *Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de* $\mathbb{R}^2$.
   — *La diagonal* $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$
   — $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \, x \notin \mathbb{Q}\}$

**Exercice 2.** *Si* $A \subset \mathbb{R}$ *on pose* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \in A\}$. *Montrer que si* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

**Exercice 3.** *Soit la tribu* $\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : -A = A\}$. *Caractériser les fonctions mesurables de* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *et les fonctions mesurables de* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

**Exercice 4.** *Soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$.

1. *Montrer que la tribu image-réciproque par* $f$ *est* $\mathcal{T}_f = \{A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$.
2. *Déterminer les fonctions mesurables de* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

**Exercice 5.** *Soit* $X$ *un ensemble non vide. On suppose que* $X$ *n'est pas dénombrable. Soit* $\mathcal{D}$ *la tribu sur* $X$ *définie par,*

$$\mathcal{D} = \{A \subset X : \quad A \text{ est au plus dénombrable ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}.$$

1. *Montrer que* $f : X \to \mathbb{N}$ *est* $(\mathcal{D}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$*-mesurable ssi il existe* $n$ *tel que* $[f^{-1}(\{n\})]^c$ *est dénombrable.*
2. *Montrer que* $f : X \to \mathbb{R}$ *est* $(\mathcal{D}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-mesurable ssi* $f$ *est constante sur une partie* $A$ *telle que* $A^c$ *soit dénombrable.*

**Exercice 6.** *Soit* $\mathcal{T} = \{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : 2n \in A \iff 2n+1 \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. *Montrer que* $\mathcal{T}$ *est une tribu sur* $\mathbb{Z}$ *et que* $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
2. *Soit* $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *définie par* $\phi(n) = n + 2$. *Montrer que* $\phi$ *est bijective,* $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$*-mesurable, mais* $\phi^{-1}$ *n'est pas* $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$*-mesurable.*

**Exercice 7.** *Montrer que toute application monotone de* $\bar{\mathbb{R}}$ *dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *est borélienne.*

**Exercice 8.** *Montrer que si* $t \in \mathbb{R}$ *et si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une application borélienne, alors* $f_t$ *et* $\hat{f}$ *les applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $f_t(x) = f(t+x)$ *et* $\hat{f}(x) = f(-x)$ *sont boréliennes.*

**Exercice 9.** *Montrer que si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable alors* $f'$ *est borélienne.*