Université Ibn-Khaldoun de Tiaret
Département de Mathématiques
Module: Mesure et Intégration

Fiche TD $N°$ **: 4**

Exercice 1. *Soit* $(E, \mathscr{B}, \mu)$ *un espace mesuré. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application* μ *définit une mesure positive et caractériser les ensembles de mesure nulle :*

1. $\mathscr{B} := \mathscr{P}(E)$ *et pour* $x \in E$ *fixé,* $\mu(A) := \mathbf{1}_A(x)$
2. $E := \mathbb{R}$, $\mathscr{B} := \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})/A$ *ou* ${}^cA$ *dénombrable* $\}$ *et* $\mu(A) = 0$ *si* A *est dénombrable,* $\mu(A) := 1$ *sinon.*
3. $E = \mathbb{N}^*, \mathscr{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ *et* μ *définie par* $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ *avec* $\mu(\emptyset) = 0$.

Exercice 2. *Soit* $(E, \mathscr{B})$ *un espace mesurable et* $\mu : \mathscr{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *définie par*

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} m_i, \quad \forall A \in \mathscr{B},$$

où $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est une suite dans* E *et* $(m_i)_{\mathbb{N}}$ *est une suite de* $\mathbb{R}$.
Montrer que μ *est une mesure positive sur* E.

Exercice 3. $E = \mathbb{N}^*, \mathscr{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ *et* μ *définie par* $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}$.
pour quelles valeurs de α, μ *est une mesure positive.*

Exercice 4. $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(F, \mathscr{B})$ *un espace mesurable et* $f : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathscr{B})$ *une fonction mesurable. Montrer que l'application* $\mu_f : \mathscr{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *définie par* $\mu_f(B) := \mu\left(f^{-1}(B)\right)$ *est une mesure sur* $(F, \mathscr{B})$.

Exercice 5. *On définit l'application* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$, *pour tout* $A \subseteq \mathbb{N}$, *par* $\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$ *si* A *est fini, avec la convention* $\frac{1}{0} = +\infty, \mu(A) = +\infty$ *si* A *est infini, et* $\mu(\emptyset) = 0$

1. *Montrer que* μ *est additive i.e. pour toute suite finie* $A_1, \ldots, A_n$ *de parties de* $\mathbb{N}$, *deux à deux disjointes,* $\mu\left(\cup_1^n A_i\right) = \sum_1^n \mu\left(A_i\right)$
2. *Montrer que* μ *n'est pas une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 6. *Soient* $(E, \mathcal{F})$ *un espace mesurable,* $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ *une application additive et* $\mu(\emptyset) = 0$.

1. *Montrer l'équivalence i)* $\Leftrightarrow$ *ii) où :*
   - *i)* μ *est une mesure sur* $(E, \mathcal{F})$.
   - *ii) Pour toute suite* $(A_n)_N$ *croissante d'éléments de* $\mathcal{F}, \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mu\left(A_n\right)$
2. *On suppose* $\mu(E) < +\infty$. *Montrer i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)* $\Leftrightarrow$ *iv) où*
   - *iii) Pour toute suite décroissante* $(A_n)_{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}, \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mu\left(A_n\right)$
   - *iv) Pour toute suite décroissante* (A_n) *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\cap_n A_n = \emptyset, \lim_n \mu\left(A_n\right) = 0$.

Exercice 7. *Montrer que la mesure de Lebesgue est invariante par translation :*
pour tout borélien B *de* $\mathbb{R}^N$, *on a, pour tout* $a \in \mathbb{R}^N$ *:*

$$\lambda(B + a) = \lambda(B)$$

Exercice 8. *La mesure de Lebesgue est invariante par symétrie :*
pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$, on a :

$$\lambda_N(-B) = \lambda_N(B)$$

Exercice 9. *Montrer que pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^N$, on a $\lambda_N(\Omega) > 0$.*

Exercice 10. *La mesure de Lebesgue est homogène :*
pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$, on a : $\lambda_N(\alpha B) = |\alpha|^N \lambda_N(B)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.