FICHE TD : N°1

Séries numériques

Exercice 1 :

Déterminer la nature des séries numériques suivantes en trouvant les suites des sommes partielles associées.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{7^{n-2}} \qquad \sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!} \qquad \sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2 :

Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum_{n\geq 1} 5^n \sin\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt[3]{n^2+2n} - \sqrt{n^2-1} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\arccos(n)}{\arccos(2n)} \qquad \sum_{n\geq 1} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{n}-1)^n$$

Exercice 3 :

Soit $a > 0$, déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} \qquad \sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{a}-1) \qquad \sum_{n\geq 1} \left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - \frac{n}{n+1}e^a\right]$$

Exercice 4 :

Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1} 2^n.n!.n^{-n} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n!}{2^n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{\ln n}}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad x>0 \qquad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Exercice 5 :

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \max(u_n, v_n), \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n v_n} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 6 :

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs convergeant vers S.

1. On pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$?
2. On pose $w_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k$, calculer $\sum_{n\geq 1} w_n$ en fonction de S.

Indice : si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n$ existe alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n$

Solution 1 :

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = a_k - a_{k+1}$$

où $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$, alors

$$S_n = \frac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \frac{1}{4}$, donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et sa somme $S = \frac{1}{4}$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géometrique de raison q différente de 1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq p$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{7^{k-2}} &= 7^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{7}\right)^k \\ &= \frac{7}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{7}\right)}\right)\end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \frac{147}{4}$, donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{3^n}{7^{n-2}}$ est convergente et sa somme est $\frac{147}{4}$

3) Sachant que

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}, \qquad \forall \alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

En prenant $\alpha = \arctan a$ et $\beta = \arctan b$, on obtient

$$\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

pour $a = k+1, b = k$, on déduit que

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \arctan(k+1) - \arctan(k)\\ &= a_{k+1} - a_k\end{aligned}$$

où $a_k = \arctan(k)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \arctan(n+1) - \arctan(1)\\ &= \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ converge et sa somme $S = \frac{\pi}{4}$

4) En utilisant le fait que $e = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, $n^2 = n(n-1) + n$ et $n! = n(n-1)!$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} &= \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\\ &= e + e - 2e\\ &= 0\end{aligned}$$

5) Comme $e = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, et $n! = n(n-1)!$

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{n^2-1+1}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n\geq 2} \frac{(n+1)}{(n-2)!} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n\geq 2} \frac{(n-2+3)}{(n-2)!} + e\\ &= \sum_{n\geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n\geq 2} \frac{3}{(n-2)!} + e\\ &= 5e\end{aligned}$$

6) la suite des sommes partielles associées est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1)-\ln k)-(\ln k-\ln(k-1)) \\ &= \sum_{k=2}^{n} a_{k+1}-a_k \end{aligned}$$

où $a_k = \ln k - \ln(k-1)$, alors

$$S_n = a_{n+1} - a_2 = \ln(n+1) - \ln n - \ln 2 = \frac{n+1}{n} - \ln 2$$

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = -\ln 2$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et sa somme est $S = -\ln 2$

Solution 2 :

1) On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, la séries est divergente.

2) Comme

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann ($\alpha = 1$) divergente, et d'après de critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ est divergente

3) On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$ et le développement limité de sin au voisinage de 0 à l'ordre 1 est $\sin x = x + \circ(x)$, en prenant $x = \left(\frac{2}{9}\right)^n$, on obtient

$$\sin\left(\frac{2}{9}\right)^n \overset{+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

donc

$$5^n \sin\left(\frac{2}{9}\right)^n \overset{+\infty}{\sim} \left(\frac{10}{9}\right)^n$$

Puisque $1 < \frac{10}{9}$, la série géometrique $\sum \left(\frac{10}{9}\right)^n$ diverge, et par le critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} 5^n \sin\left(\frac{2}{9}\right)^n$ est divergente.

4) on a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1} &= \sqrt[3]{n^2(1+\frac{2}{n})}-\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n^2})}\\ &= n^{\frac{2}{3}}-n\\ &= n\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}-1\right)\\ &\overset{+\infty}{\sim} -n\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}\overset{+\infty}{\sim} -n$$

La série $\sum n$ est divergente, et par le critère d'équivalence de séries à termes positifs la série $\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}$ est divergente

5)

$$\frac{\operatorname{arccos}(n)}{\operatorname{arccos}(2n)}=\frac{e^n-e^{-n}}{e^{2n}-e^{-2n}}\overset{+\infty}{\sim}\frac{e^n}{e^{2n}}=e^{-n}$$

$\sum\limits_{n\geq 0}\exp^{-n}$ est une série géométrique convergente, et d'après la règle d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{\operatorname{arccos}(n)}{\operatorname{arccos}(2n)}$ est convergente.

6) Au voisinage de 0, on a $\ln(1+x)=x-\frac{x}{2}+o(x^2)$

$$\begin{aligned}u_n &= e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &\overset{+\infty}{\sim} e-e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)}\\ &= e-e^{1-\frac{1}{2n}}\end{aligned}$$

En utilisant cette fois-ci le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de 0 à l'ordre 1, on trouve

$$u_n\overset{+\infty}{\sim} e-e1-\frac{1}{2n}=\frac{e}{2n}$$

$\sum\limits_{n\geq 0}\frac{e}{2n}$ est une série de Riemann divergente, et d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ est divergente.

7) On applique la règle de Cauchy. En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 1, on trouve

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{n}-1=\lim_{n\longrightarrow+\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}-1=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\ln n}{n}=0<1$$

La série est convergente.

Solution 3 :

1) Comme $a > 0$, $(1+a)(1+a)^2 \cdots (1+a)^{n-1} > 1$, d'ou

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2 \cdots (1+a)^n} < \left(\frac{a}{1+a}\right)^n$$

Puisque $0 < \dfrac{a}{1+a} < 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^n$ converge, et par le critère de comparaison de séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}\right)^n$ est convergente.

2) Le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de 0 à l'ordre 1 donne $e^x \overset{0}{\sim} 1+x$, en prenant $x = \dfrac{\ln a}{n}$, on obtient

$$\sqrt[n]{a} - 1 = e^{\frac{\ln a}{n}} - 1 \overset{+\infty}{\sim} 1 + \frac{\ln a}{n} - 1 = \frac{\ln a}{n}$$

$\sum \dfrac{\ln a}{n}$ est une série de Riemann ($\alpha = 1$) divergente, et d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geq 1}(\sqrt[n]{a} - 1)$ est divergente.

3) Posons $w_n = \left[\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n - \dfrac{n}{n+1}e^a\right]$
On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$, $w_n \overset{+\infty}{\sim} e^a - \dfrac{n}{n+1}e^a$.
Il s'ensuit que $w_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^a}{n}$
$\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{e^a}{n}$ est une série divergente, et d'après la règle d'équivalence $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ est divergente.

Solution 4 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n.n!.n^{-n} \geq 0$. Utilisant la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2^{n+1}.(n+1)!(n+1)^{-n-1}}{2^n.n!.n^{-n}} = \frac{2}{e} < 1$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n.n!.n^{-n}$ est convergente

2) Posons $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2} \longrightarrow +\infty$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n!}{2^n}$ est divergente.

3) On a

$$\frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln 3^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln 3}} = \frac{1}{e^{\ln n^{\ln 3}}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

Mais $\ln 3 > 1$, alors $\sum \dfrac{1}{3^{\ln n}} = \sum \dfrac{1}{n^{\ln 3}}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = \ln 3$)

4) Pour tout $n \geq 1$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln(\ln n)}} = \frac{1}{e^{\ln n^{\ln(\ln n)}}} = \frac{1}{n^{ln(\ln n)}}$$

Appliquant la règle de Reimann

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^2 u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^{\ln(\ln n)}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n^{2-\ln(\ln n)} = 0$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ est convergente

5) On a $\ln(1+z) = z + \circ(z)$ au voisinage de 0, en prenant $z = \frac{x}{n}$ qui tend vers 0 lorque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{n\frac{x}{n}} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, la série est divergente.

6) On applique la règle de Cauchy

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{n}{n^2+n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{n}{n^2+n+1}\right)} \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{-n\frac{n}{n^2+n+1}} \\
&= e^{-1} < 1
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$ est convergente.

7) On a

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\
&= e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= e^{-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{-n+\frac{1}{2}+\circ(1)} \\
&\overset{+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}} e^{-n}
\end{aligned}$$

Par comparaison à une série géometrique convergente, la série de terme général u_n converge.

Solution 5 :

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\max(a,b) \leq a+b$$

et comme $2ab \leq a^2+b^2$ alors $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$. $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient les majorations suivantes

$$\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n \quad , \quad \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n+v_n}{2}$$

et

$$\frac{u_n v_n}{u_n+v_n} \leq \frac{u_n v_n}{v_n} = u_n$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure.

Solution 6 :

1) Soit $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge vers S

   Ainsi
   $$v_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{S}{n}$$
   $\sum \dfrac{S}{n}$ est une série de Riemann divergente, et d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est divergente.

2) On a

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k.u_k \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n} k.u_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k.u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k.u_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k.u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k + u_{n+1} \end{aligned}$$

   posons $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.u_k$, w_n s'écrit

$$w_n = a_n - a_{n+1} + u_{n+1}$$

On peut maintenant trouver la suite des sommes partielles de la série $\sum W_n$ qu'on note T_n

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} w_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \\
&= a_1 - a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} u_k \\
&= u_1 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k + \sum_{k=2}^{n+1} u_k \\
&= S_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k
\end{aligned}$$

Calculons $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k$, on a

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k & = & u_1 & + & 2u_2 & + & 3u_3 & + & \cdots & + & (n+1)u_{n+1} & & \\
& = & u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & \cdots & + & u_{n+1} & \longrightarrow & S_{n+1} \\
& & & + & u_2 & + & u_3 & + & \cdots & + & u_{n+1} & \longrightarrow & S_{n+1} - S_1 \\
& & & & & + & u_3 & + & \cdots & + & u_{n+1} & \longrightarrow & S_{n+1} - S_2 \\
& & & & & & \ddots & & & & \vdots & & \\
& & & & & & & & & + & u_{n+1} & \longrightarrow & S_{n+1} - S_n
\end{array}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k = (n+1)S_{n+1} - S_1 - S_2 - \cdots - S_n$$

On déduit alors que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k.u_k = S_{n+1} - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n+1}$$

Revenant maintenant a l'expression de T_n

$$T_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n+1}$$

Grâce a l'indication, on trouve que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = S$$