FICHE TD : N°2

Séries numériques

Exercice 1 :

Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\frac{1}{n} \qquad \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \qquad \sum_{n\geq 2}\frac{(1-)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}, \quad \alpha>0$$

Exercice 2 :

1. L'inégalité suivante est-elle vérifier ?

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1}\ln^2(t)dt \leq \ln^2(k+1) \qquad 1\leq k\in\mathbb{N}; \quad t\in[1,+\infty[$$

2. Par une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x \ln^2(t)dt$$

3. Donner un équivalent de

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln^2(k) \qquad \text{quand } n\longrightarrow+\infty$$

4. La séries de terme général $\frac{1}{S_n}$ est-elle convergente ?

Exercie 3 :

Établir une comparaison avec des intégrales

1. $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \overset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$
2. $\ln(n!) \overset{+\infty}{\sim} n\ln n$
3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \overset{+\infty}{\sim} \ln n$
4. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k} \overset{+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$
5. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} \overset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$

Exercice 4 :

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $v_n = (-1)^n u_n$, $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} v_k$

1. Préciser la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$
2. Donner un équivalent de S_n au voisinage de $+\infty$
3. Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln 2.\ln n + \dfrac{1}{2}.(\ln 2)^2 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$
4. Calculer $S_{2n} + T_{2n}$
5. En déduire $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$

Exercice 5 :

Déterminer la nature de le série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{\alpha}} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$
   c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$
   d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$
   e) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$, puis déduire que $W_n \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

   et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 2$ par

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$

   a) Exprimer v_n en fonction de n et donner un développement limité a l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   b) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.
   c) Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et donc il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \overset{+\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$$

   d) En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$
   e) En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et donc

$$n! \overset{+\infty}{\sim} n^n.e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Solution 1 :

1) Il s'agit d'une série alternée. Posons $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{2}$ alors a_n est positive et tend vers 0, et on a

$$n < n+1 \to \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

car la fonction sin est positive et croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et d'après le théorème de Leibnitz la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

2) On effectuée un développement limité de la fonction sin au voisinage de 0 à l'ordre 1, on obtient

$$\sin\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente d'après le théorème de Leibniz, et comme

$$\left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\right|$$

la série $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

3) Les développements limités des fonctions $\ln(1+n)$ et $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 1 s'écrivent

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$
$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + o(x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} &= \frac{(-1)^n}{\ln n + \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})} \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln n + \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)} \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n\ln n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n\ln n}\right)} \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n\ln n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n\ln n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n\ln n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{n(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)
\end{aligned}$$

La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente d'après le théorème de Leibnitz, $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est une série de Bertrand ($\alpha = 1$ *et* $\beta = 2$) convergente et la série $\sum o(\frac{1}{n(\ln n)^2})$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$ est convergente comme somme de séries convergentes.

4) On a

$$|u_n| = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}}$$

Ainsi $|u_n| \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha > 2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente et donc convergente si $\alpha > 2$

Pour le cas $0 < \alpha \leq 2$, on utilise le développement limité de la fonction $(1+x)^a$ en 0, avec $a = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+o\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 0$, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est convergente d'après le théorème de Leibnitz, de plus

$$\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha}}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}}$$

Si $\frac{3}{2}\alpha > 1$ donc $\alpha > \frac{2}{3}$, la série $\sum \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}}$ converge, et d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}\alpha}}\right)$ coverge, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.

Si $\frac{3}{2}\alpha < 1$ donc $0 < \alpha < \frac{2}{3}$, la série $\sum \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}}$ est divergente, et d'après le critère d'équivalence, $\sum \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}} + o\left(\frac{(-1)^n}{2n^{\frac{3}{2}\alpha}}\right)$ diverge, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente comme la somme d'une série convergente et une autre divergente.

Solution 2 :

1) La fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ est croissante sur $[1, \infty[$, pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} k \leq t \leq k+1 &\Rightarrow \ln^2(k) \leq \ln^2(t) \leq \ln^2(k+1) \\ &\Rightarrow \ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)dt \leq \ln^2(k+1) \end{aligned}$$

2) En utilisant une intégration par partie, pour $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2(t)$ on trouve

$$\int_1^x \ln^2(t)dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x - 2$$

3) On a

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)dt \leq \ln^2(k+1)$$

en sommant ces inégalités de $k = 1$ jusqu'à $k = n$, on trouve

$$S_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt \leq S_{n+1} - \ln^2(1)$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_1^n \ln^2(t)dt \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt$$

ainsi

$$n\ln^2(n) - 2n\ln(n) + 2n - 2 \leq S_n \leq (n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2$$

donc

$$S_n \overset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$$

et

$$\frac{1}{S_n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

4) Comme la série $\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$ est convergente, la série de terme général $\frac{1}{S_n}$ est convergente.

Solution 3 :

1) On va d'abord déterminer un équivalent de numérateur par encadrement à une intégrale. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{k-1}^k \sqrt{x}dx \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{x}dx$$

on somme ces inégalités pour k allant de 1 à n pour trouver

$$\int_0^n \leq v_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}dx$$

où

$$v_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$$

On conclure leq intégrales, et on déduit que

$$v_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$$

2) On se ramène à une somme en remarquant que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

Puisque la fonction ln est croissante, on a pour tout $k \geq 2$

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt$$

On somme cette inégalité pour k allant de 2 à n, remarquant que $\ln(1) = 0$, on trouve

$$\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)dt$$

Une primitive de $\ln x$ étant donnée par $x \ln x - x$, on trouve

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$$

On divise par $n \ln n$ pour trouver que $\ln(n!) \overset{+\infty}{\sim} n \ln n$. La seule chose non évidente à vérifier est que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} = 1$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{n \ln n}$$

Suivant les même étapes on obtient les autres équivalences.

Solution 4 :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^{-1}}$ est une série de Bertrand divergente. On peut aussi utiliser $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \overset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$, la suite des sommes partielles est divergente car $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2}{2} = +\infty$.

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est une série alternée. On a $v_n = (-1)^n u_n$ avec $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0, pour montrer qu'elle est décroissante, on considère la fonction $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Comme

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0, \qquad \forall x \in [e, +\infty[$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang, on conclut que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est une série convergente d'après le théorème de Leibniz.

2) D'après l'exercice 5 de fiche TD 1

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{\ln k}{k} \overset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$$

3) Comme

$$\begin{aligned} S_n &\overset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2} \\ S_{2n} &\overset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln 2 + \ln n)^2}{2} = \frac{(\ln n2)^2}{2} + \frac{(\ln n)^2}{2} + \ln 2 \ln n \end{aligned}$$

ainsi

$$S_{2n} - S_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln 2)^2}{2} + \ln 2 \ln n$$

4) Calculons $S_{2n} + T_{2n}$

$$\begin{aligned} S_{2n} + T_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} u_k + \sum_{k=2}^{2n} (-1)^n u_k \\ &= \sum_{k=2}^{2n} (1 + (-1)^n) u_k \\ &= 2 \sum_{k=2}^{n} u_{2k} \\ &= 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(2)}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + S_n \end{aligned}$$

ainsi

$$S_{2n} + T_{2n} = S_n + \ln 2 \ln n + o(1)$$

5) Comme la série $\sum_{n \in [N]} v_n$ est convergente alors sa somme est $\lim_{n \longrightarrow +\infty} T_{2n}$, et d'après les questions 3. et 4.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T_{2n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\ln 2 \ln n - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2 \ln n \right) = -\frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Solution 5 :

D'après l'exercice 3,

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n} n^{-\alpha} = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}}$$

$\sum \frac{1}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $n^{\alpha - \frac{3}{2}} > 1$, et d'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha - \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{5}{2}$

Solution 6 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

   a) Soit $n \geq 0$, posons $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, alors $\cos(t) = \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin(u)$, et $dt = du$

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \, du$$

   b) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n t \geq 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geq 0$.
   Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui est absurde. Ainsi, $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   c) Soit $n \geq 2$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n-1} t \, dt \\
&= \sin t \cos^{n-1} t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-(n-1)(\sin t \cos^{n-2} t)) \, dt \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos^{n-2} t) \, dt \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \, dt \\
&= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n
\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, $nW_n(n-1)W_{n-2}$

   d) Posons, pour tout $n \geq 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$, d'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$.

$$u_n = nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

   La suite $(u_n)_n$ est donc constante et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$, par conséquent, $u_n = nW_nW_nn - 1 = u_1 = \dfrac{\pi}{2}$

   e) pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \leq \cos t \leq 1$$

   donc pour tout $n \geq 0$, $\cos^n t \geq 0$ et

$$0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$$

   En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leq W_n$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, puisque $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\frac{n-1}{n}W_{n-1} \leq \frac{n-1}{n}W_{n-2} = W_n \leq W_{n-1}$$

   Puisque $W_n > 0$, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$. On a $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 1$, alors $\dfrac{1}{W_{n-1}} = \dfrac{2}{\pi}nW_n$, en déduit que

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{2}{\pi}nW_n^2 \leq 1,$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2}{\pi}nW_n^2=1$, $\quad W_n^2\overset{+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2n}$ et comme $W_n>0$,

$$W_n\overset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2) *a*) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}=\frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}}e=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\frac{1}{2}}e$$

Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\dfrac{1}{2}}e.$$

D'autre part, pour tout $n\geq 2$, $v_n=\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$,

$$\begin{aligned}u_n&=\ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}e\right)\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\end{aligned}$$

Le développement de $\ln(1-u)$ à l'order 3 en 0 est $\ln(1-u)=-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}+o(u^3)$,

$$\begin{aligned}v_n&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+1\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\\&=-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

b) D'après la questions précédente, $|v_n|\overset{+\infty}{\sim}\frac{1}{12n^2}$, est une série de Riemann convergente, et par la règle d'équivalence la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente. La série $\sum v_n$ est télescopique,

$$\sum_{k=2}^{n}v_k=\sum_{k=2}^{n}(\ln u_k-\ln u_{k-1})=\ln u_n-\ln u_1=\ln u_n-1$$

donc $(\ln u_n)_n$ converge vers $l\in\mathbb{R}$, et par continuité de la fonction exponentielle, la suite $u_n=e^{\ln(u_n)}$ converge vers $K=e^l>0$.
Comme $K>0$, et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=K$ peut s'écrire $u_n\overset{+\infty}{\sim}K$,

$$u_n=\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\overset{+\infty}{\sim}K$$

ainsi

$$n!\overset{+\infty}{\sim}K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$$

c) Montrons tout d'abord que la propriété

$$(p): \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geq 0$

On a $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc (p) est vraie pour 0

Supposons que (p) vraie, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc $(p+1)$ est vraie.

Pour tout $p \geq 0$, $W_{2p} = dfrac(2p)!(2^p p!)^2 \dfrac{\pi}{2}$

D'après la question précédente, pour tout $p \geq 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$, et

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{\pi}{2} = \frac{(2^p p!)^2}{((2p+1)!)}$$

On a

$$p! \overset{+\infty}{\sim} Kp^p e^{-p}\sqrt{p}(2p)! \overset{+\infty}{\sim} K2p^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&\overset{+\infty}{\sim} \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p Kp^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{K2^{2p}p^{2p+\frac{1}{2}}e^{-2p}}{K^2 2^{2p}p^{2p+1}e^{2p}}\frac{\pi\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}
\end{aligned}$$

maos d'après 1)*e*), $W_{2p} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, donc $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et $K = \sqrt{2\pi}$.

En conclusion

$$n! \overset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling.