Série d'exercices n°2 (optimisation)

Exercice 1

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}; & (x,\, y) \neq (0{,}0) \\ 0; & (x,\, y) = (0{,}0)\,. \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c,\, d \in \mathbb{R}^n$.

On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha. \end{aligned}$$

Déterminer ∇f, $\nabla^2 f$, ∇g, $\nabla^2 g$.

Exercice 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,\, y) = \begin{cases} |x+y|^{\alpha}\,;\; x+y \neq 0 \\ 0\,;\; x+y = 0 \end{cases}.$$

1) calculer les dériveés partielles de f à un point $(x,\, y)$ tel que $x+y=0$, discuter suivant les valeurs de α.

2) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.