Correction d'examen

Questions de cours : Voir le cours.

Ex 01 : On considère le problème

$$(I) : \begin{cases} y'(t) = t\, y^2(t) , & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1°/ On a $f(t,y) = t y^2$ est de classe C^1 donc elle est localement lipschitzienne d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution maximale de l'équation (I) qui vérifie $y(t_0) = y_0$ sur un intervalle ouvert. 3

2°/ On a $\tilde{y} \equiv 0$ est une solution triviale du problème $\begin{cases} y'(t) = t y^2(t) , & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = 0 . \end{cases}$

d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz cette solution est unique. 2

3°/ On suppose que $y(t_0)=y_0\neq 0$, et que (y,I) la solution maximale change de signe (i,e) $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $y(t_1)<0$ et $y(t_2)>0$.

d'après le théorème des valeurs intermidiairs (puisque y est continue), $\exists \tilde{t}\in]t_1,t_2[$ tel que : $y(\tilde{t})=0$, donc $y(\tilde{t})=\tilde{y}(\tilde{t})=0$

d'après le théorème d'unicité ~~$y(t)=$~~

$y\equiv\tilde{y}$ (i,e) $y(t)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$, en particulier $y(t_0)=0$, ce qui contredit. alors y ne change pas le signe.

3

4°/ on a que si $y_0\neq 0$, alors $y(t)\neq 0, \forall t\in\mathbb{R}$

ainsi $\dfrac{dy}{dt}=ty^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2}=t\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2}=\int_{t_0}^{t} s\,ds$$

3

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} + c = \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right).$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(t_0^2 - t^2\right) + c}.$$

et comme $y(t_0) = y_0$, on obtient

$$y_0 c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{y_0}.$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(t_0^2 - t^2\right) + \frac{1}{y_0}}.$$

Exo 02 : on a f est globalement lipschi. % y

(i, e) $\forall t, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \quad \ldots (*)$$

et
$$|g(t,y_1) - g(t,y_2)| = |f(t,y_1) + \phi(t) - f(t,y_2) - \phi(t)|$$
$$= |f(t,y_1) - f(t,y_2)|$$
$$\leq L\,|y_1 - y_2| \quad \ldots (**)$$

3

Alors :

les problème : $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

et $\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$

admettent des solutions maximales y, z qui sont uniques et globales.

~~et~~ car $(*)$, $(**)$ sont des conditions suffisantes pour que les solutions maximals sont globals.

2°/ On tranforme (2) et (3) ~~à des~~ à deux équations integrales

$$\cancel{y(t) = \int^t f(t, y(t}$$

(2) $$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

(3) $$z(t) = z_0 + \int_0^t \left[f(s, z(s)) + \phi(s) \right] ds$$

donc :

$$|y(t)-z(t)| \leq |y_0-z_0| + \int_0^t |f(s,y(s))-f(s,z(s))|\,ds + \int_0^t |\phi(s)|\,ds$$

$$\leq |y_0-z_0| + \int_0^t |\phi(s)|\,ds + \int_0^t L|y(s)-z(s)|\,ds$$

d'après l'inégalité de Gronwall

on aura :

$$|y(t)-z(t)| \leq \left[|y_0-z_0| + \int_0^t |\phi(s)|\,ds\right] e^{Lt}$$

4