Université Ibn Khaldoun Tiaret.
Département des Mathématiques
Faculté de Mathématiques et Informatique

$1^{\text{ère}}$ anné Master L.M.D. AFED (Maths)
Année universitaire : 2022-2023
Le 28-05-2023

Calcul Fractinnaire, Durée 1H 30 mn

Exercice1 :

On considère un problème avec une condition initiale, le but est de montrer l'existence et l'unicité du solution dans un espace bien special.

Soit $f \in C^m[0,b]$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (D_{0^+}^{\alpha,\beta}x)(t) = f(t,x) & t>0,\ 0<\alpha<1,\ 0\leq\beta\leq 1 \\ I_{0^+}^{1-\gamma}x(0) = x_0 & \gamma = \alpha+\beta-\alpha\beta \end{cases} \tag{1}$$

où : $D_{0^+}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer.

On rapelle que

$$(D_{0^+}^{\alpha,\beta}x)(t) = \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)(I^{(1-\beta)(1-\alpha)}x)\right)(t)$$

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha,\beta}x = I_{0^+}^{\gamma}D_{0^+}^{\gamma}x,$$

$$(D_{0^+}^{\alpha,\beta}x)(t) = \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}D^{\gamma}x\right)(t)$$

(1) Montrer que l'equation (1) est equivalent a l'equation intégrale

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds \tag{2}$$

(2) Introduisons l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b] = \left\{x:[0,b]\to\mathbb{R}, t^{1-\gamma}x(t)\in\mathcal{C}[0,b]\ 0\leq\gamma<1\right\},$$

Montrer que toute suite de Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ de $\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]$ est convergente dans $\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]$.

(3) On introduit maintement l'application :

$$\|x\|_\gamma = \sup_{t\in[0,b]}|t^{1-\gamma}x(t)|$$

Montrer que $\|.\|_\gamma$ est une norme sur $\mathcal{C}_{1-\gamma}$.

On definit l'operateur suivant,

$$(Nx)(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds \tag{3}$$

(4) Montrer qu'on a :

$$\|I_{0^+}^{\alpha}x\|_\gamma \leq \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}t^{\alpha}\|x\|_\gamma$$

Nous supposerons que

Tournez la page

1. $f(t,x)$ est définie dans $]0,b]\times]x_0-\delta, x_0+\delta[(\delta>0)$
2. $\forall x$ l'application $f(.,x)\in\mathcal{C}_{1-\gamma}([0,b])$
3. f est uniformément lipschitzienne par rapport à x i.e,$\exists w>0$ telle que

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq w|x_1-x_2|.$$

(5) Montrer que si $x\in C_{1-\gamma}([0,b])$ alors $Nx\in C_{1-\gamma}([0,b])$

(6) En utilisant la contaction de Banach, Montrer que le probléme (1) admet une seule solution x dans $\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]$.