Université Ibn Khaldoun Tiaret.
Département des Mathématiques
Faculté de Mathématiques et Informatique

$1^{\text{ère}}$ anné Master L.M.D. AFED (Maths)
Année universitaire : 2022-2023
Le 28-05-2023

Corrigé Calcul Fractinnaire

Exercice1 :
On considère un problème avec une condition initiale, le but est de montrer l'existence et l'unicité du solution dans un espace bien special.
Soit $f \in C^m[0,b]$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (D_{0^+}^{\alpha,\beta} x)(t) = f(t,x) & t > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1 \\ I_{0^+}^{1-\gamma} x(0) = x_0 & \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \end{cases} \tag{1}$$

où : $D_{0^+}^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer.
On rapelle que

$$(D_{0^+}^{\alpha,\beta} x)(t) = \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) (I^{(1-\beta)(1-\alpha)} x) \right)(t)$$

$$I_{0^+}^{\alpha} D_{0^+}^{\alpha,\beta} x = I_{0^+}^{\gamma} D_{0^+}^{\gamma} x,$$

$$(D_{0^+}^{\alpha,\beta} x)(t) = \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} D^{\gamma} x \right)(t)$$

(1) Montrons que l'equation (1) est equivalent a l'equation intégrale

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\, ds \tag{2}$$

1-Soit $x \in C_{1-\gamma}(0,b]$ une solution du probléme (1) et montrons que x vérifie (1)
On a d'après une proposition :

$$\begin{aligned} I_a^{\gamma} D_0^{\gamma} &= x(t) - \frac{I_0^{1-\gamma} x(0)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \\ &= x(t) - \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} \end{aligned}$$

D'autre part on a d'après un lemme :

$$\begin{aligned} I_0^{\gamma} D_0^{\gamma} y &= I_0^{\alpha} D_0^{\alpha,\beta} x \\ &= I_0^{\alpha} f, \end{aligned}$$

On obtient donc

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\, ds \tag{3}$$

Deuxièmement prouvons la condition suffisante.
Soit $x \in C_{1-\gamma}(0,b]$ satisfait l'équation (1)

Appliquons L'opèrateur D_0^γ sur les deux cotés de l'équation (1) et en utilisant un lemme on obtient :

$$\begin{aligned} D_0^\gamma x(t) &= D_0^\gamma\left(\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+[I_0^\alpha f(s,x(s))](t)\right) \\ &= \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}D_0^\gamma t^{\gamma-1}+D_0^\gamma I_0^\alpha f(s,x(s))(t) \\ &= D_0^{\beta(1-\alpha)}f(s,x(s))(t). \end{aligned}$$

On applique L'opèrateur $I_0^{\beta(1-\alpha)}$ sur les deux cotés de l'équation precedante et en utilisant une proposition on obtient :

$$\begin{aligned} I_0^{\beta(1-\alpha)}[D_0^\gamma x(t)] &= I_0^{\beta(1-\alpha)}[D_0^{\beta(1-\alpha)}x(t)] \\ &= f(t,x(t))-\frac{\left[I_0^{1-\beta(1-\alpha)}f(s,x(s))\right](0)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}t^{\beta(1-\alpha)-1} \end{aligned}$$

Puisque $1-\gamma<1-\beta(1-\alpha)$, d'après un lemme alors :

$$\left[I^{1-\beta(1-\alpha)}f(s,x(s))\right](0)=0$$

D'où

$$D_a^{\alpha,\beta}x(t)=f(t,x(t))\quad t\in(0,b]$$

Il reste de montrer que l'équation (4.2) vérifie la condition initial de (4.1)
Appliquons l'opérateur $I_0^{1-\gamma}$ sur les deux cotés de l'équation precedante :

$$\begin{aligned} I_0^{1-\gamma}x(t) &= I_0^{1-\gamma}\left[\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+I_0^\alpha f(s,x(s))\right](t) \\ &= \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}I_0^{1-\gamma}t^{\gamma-1}+I_0^{1-\gamma+\alpha}f(s,x(s))(t) \\ &= x_0+I_0^{1-\beta(1-\alpha)}f(s,x(s))(t) \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{t\to a} I_0^{1-\beta(1-\alpha)}f(s,x(s))(x)=0,$$

donc :

$$I_a^{1-\gamma}x(t)=x_0,$$

alors on conclus que :

$$x(t)=\frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\ dt$$

est une solution de probléme (1) dans l'espace $C_{1-\gamma}(0,b]$ (5 point).

(2) Introduisons l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]=\left\{x:[0,b]\to\mathbb{R},t^{1-\gamma}x(t)\in\mathcal{C}[0,b]\ 0\leq\gamma<1\right\},$$

Montrer que toute suite de Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ de $\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]$ est convergente dans $\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]$.(3 point)

(3) On introduit maintement l'application :

$$\|x\|_\gamma = \sup_{t\in[0,b]} |t^{1-\gamma}x(t)|$$

Montrons que $\|.\|_\gamma$ est une norme sur $\mathcal{C}_{1-\gamma}$.

Soit $f \in C_\alpha([0,b]$

$$\begin{aligned}
\|f\|_\alpha = 0 &\Leftrightarrow \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}f(t)| = 0 \\
&\Leftrightarrow |t^{1-\alpha}f(t)| = 0 \ \forall t \in [0,b] \\
&\Leftrightarrow x^{1-\alpha}f(t) = 0 \ \forall t \in [0,b] \\
&\Leftrightarrow t^{1-\alpha}f(t) = 0 \ \forall t \in]0,b] \\
&\Leftrightarrow f(t) = 0 \ \forall t \in]0,b] \\
&\Leftrightarrow f = 0.
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\alpha &= \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}(\lambda f)(t)| \\
&= \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}\lambda f(t)| \\
&= \sup_{[0,b]} |\lambda||x^{1-\alpha}f(t)| \\
&= |\lambda| \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}f(t)| \\
&= |\lambda| \ \ \|f\|_\alpha .
\end{aligned}$$

Soient $f, \ g \in C_\alpha([0,b])$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\alpha &= \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}(f+g)(t)| \\
&= \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}(f(t)+g(t))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x^{1-\alpha}(f(t)+g(t))| &= |x^{1-\alpha}f(t) + t^{1-\alpha}g(t)| \\
&\leq |t^{1-\alpha}f(t)| + |x^{1-\alpha}g(t)| \\
&\leq \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha}f(t)| + \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}g(t)| \\
\sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}(f(t)+g(t))| &\leq \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}f(t)| + \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}g(t)| \\
\|f+g\|_\alpha &\leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha .(3point)
\end{aligned}$$

On definit l'operateur suivant,

$$(Nx)(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\ ds \tag{4}$$

(4) Montrer qu'on a :

$$\|I_{0^+}^{\alpha} x\|_{\gamma} \leq \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} t^{\alpha} \|x\|_{\gamma}$$

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$

$$\begin{aligned}
\|I_{a^+}^{\alpha} f\|_{C_{1-\gamma}[0,b]} &= \|t^{1-\gamma} I_{0^+}^{\alpha} f\|_{C(0,b]} \\
&\leq \|f\|_{C_{1-\gamma}(0,b]} \|I_{0^+}^{\alpha} t^{1-\gamma}\|_{C_{1-\gamma}(0,b]} \\
&\leq \|f\|_{C_{1-\gamma}(0,b]} \left\| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} t^{\alpha-1+\gamma} \right\|_{C_{1-\gamma}[a,b]} \\
&\leq \|f\|_{C_{1-\gamma}(0,b]} \left\| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} t^{\alpha-1+\gamma} t^{1-\gamma} \right\|_{C(0,b]} \\
&\leq \|f\|_{C_{1-\gamma}(0,b]} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} t^{\alpha} (3point)
\end{aligned}$$

Nous supposerons que

1. $f(t,x)$ est définie dans $]0,b] \times]x_0 - \delta, x_0 + \delta[(\delta > 0)$
2. $\forall x$ l'application $f(.,x) \in \mathcal{C}_{1-\gamma}([0,b])$
3. f est uniformément lipschitzienne par rapport à x i.e,$\exists w > 0$ telle que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq w|x_1 - x_2|.$$

(5) Montrer que si $x \in C_{1-\gamma}([0,b])$ alors $Nx \in C_{1-\gamma}([0,b])$(3 point)

(6) En utilisant la contaction de Banach, Montrons que le probléme (1) admet une seule solution x dans $\mathcal{C}_{1-\gamma}[0,b]$.

$$\begin{aligned}
\|Nx_1 - Nx_2\|_{\alpha} &= b^{1-\alpha} \|I_0^{\alpha} f(s, x_1(t)) - I_0^{\alpha} f(s, x_2(s))\|_{\infty} \\
&\leq b^{1-\alpha} \|I_a^{\alpha} [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))]\|_{\infty} \\
&\leq b^{1-\alpha} \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) ds \Big\|_{\infty} \\
&\leq b^{1-\alpha} \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} t^{\alpha} \|(f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) ds\|_{\infty} \\
&\leq b^{1-\alpha} \frac{\omega}{\alpha\Gamma(\alpha)} \max_{t\in[0,b]} t^{\alpha} \|x_1(t) - x2(t)\|_{\infty} \\
&\leq \frac{\omega}{\alpha\Gamma(\alpha)} b \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Puisque $0 < \omega < 1$, N est un contraction, et puisque $f(x, y(x)) \in C(0,b]$ pour quelque soit $x \in C(0,b]$ on a $Nx \in C(0,b]$, d'après le théorème de point fixe du Banach il existe une seule solution $x \in C(0,b]$ de l'équation (1) dans l'intervalle $[0,b]$(3point)