

Table des matières

1 Fonctions à valeur dans \mathbb{R}^2 : courbes paramétrées	3
1.1 Plan d'étude d'une courbe paramétrée	3
1.2 Etude des branches infinies	4
1.3 Etude de points particuliers	5
1.3.1 Etude en un point stationnaire $M(t_0)$	5
1.3.2 Position de \mathcal{C} par rapport à T en un point $M(t_0)$	5
1.3.3 Points doubles (ou multiples)	7
1.4 Etude d'un exemple	7

1 Fonctions à valeur dans \mathbb{R}^2 : courbes paramétrées

Définition 1 (et interprétation géométrique) Soit \mathcal{D} un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 .

- Une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est appelée **application vectorielle** à valeurs dans \mathbb{R}^2 .
- Les deux fonctions $x : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathcal{D} : f(t) = (x(t), y(t))$$

sont appelées les applications **composantes** de (ou : associées à) f .

- Le plan étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note $M(t)$ le point dont les coordonnées sont $f(t) = (x(t), y(t))$. Lorsque le **paramètre** t parcourt \mathcal{D} , le point $M(t)$ décrit un sous-ensemble du plan, appelé la **courbe** \mathcal{C} de (ou : associée à) f .
- Le système d'équations

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathcal{D}$$

est appelé une **représentation paramétrique** de \mathcal{C} .

On dit alors que \mathcal{C} est une courbe paramétrée.

1.1 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

On procède en 6 étapes, précisées ci-dessous :

1) Préciser le domaine de définition \mathcal{D} c'est à dire l'ensemble des points en lesquels les **deux** applications composantes x et y sont définis.

2) Recherche de périodes et symétries

1. Si $\exists T > 0 : \forall t \in \mathcal{D}, x(t) = x(t+T)$ et $y(t+T) = y(t)$, la fonction est t -périodique : on peut alors restreindre l'étude à l'intersection de \mathcal{D} avec un intervalle de longueur T , et on obtient ainsi toute la courbe.
2. Si \mathcal{D} est symétrique et on a une des symétries suivantes :
 - (i) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x et y fcts paires de t),
 - (ii) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x impaire et y paire),
 - (iii) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x paire et y impaire),
 - (iv) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x et y impaires),

alors on restreint l'étude à $t \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe

(i) qui est parcourue 2 fois

(ii) en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe y

- (iii) en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe x
- (iv) en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'origine O .

- 3) **Rechercher les éventuelles branches infinies** : voir chapitre 1.2
- 4) **Faire un tableau de variations** pour x et y , en étudiant les signes de x' et y' .
- 5) **Etudier les points particuliers** tels que points stationnaires (= singuliers), points doubles : voir chapitre 1.3
- 6) **Tracer la courbe** en s'aidant des résultats précédents, notamment en reportant aussi les points singuliers, tangentes et asymptotes.

1.2 Étude des branches infinies

Définition 2 La courbe \mathcal{C} présente une branche infinie (ou : un arc infini), si au moins une des coordonnées tend vers l'infini, pour $t \rightarrow t_0$, avec $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Les cas suivants sont possibles :

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$: \mathcal{C} admet la droite Δ d'équation $x = \ell$ comme asymptote verticale
2. $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$: \mathcal{C} admet la droite Δ d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$: On étudie $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t)/x(t)$:
 - (a) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors \mathcal{C} admet une branche parabolique dans la direction Oy
 - (b) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors \mathcal{C} admet une branche parabolique dans la direction Ox
 - (c) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0$, on étudie la fonction $y - a.x$:
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - a.x(t)) = b \in \mathbb{R}$ alors \mathcal{C} admet la droite Δ d'équation $y = a.x + b$ comme asymptote, et la position de \mathcal{C}/Δ dépend du signe de $y - a.x - b$. (On peut utiliser un $DL(t_0)$ pour le trouver.)
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - a.x(t)) = \pm\infty$ alors \mathcal{C} admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = a.x$.
 - Si $y - a.x$ n'admet pas de limite, on ne sait pas conclure.
 - (d) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ n'admet pas de limite, on ne peut conclure sur la nature de l'arc infini.

1.3 Etude de points particuliers

Définition 3 On suppose que $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont dérivables en t_0 . Le vecteur $\vec{V}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé le vecteur dérivée de f en t_0 . On note aussi $\vec{V}'(t_0)$ par $\frac{d}{dt}\vec{OM}(t_0)$.

• Si $\vec{V}'(t_0) \neq \vec{o}$, c'est à dire $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$, le point $M(t_0)$ est dit **point ordinaire**. La droite (T) de vecteur directeur $\vec{V}'(t_0)$ et passant par $M(t_0)$ est appelée tangente à C en $M(t_0)$.

Une représentation paramétrique de T est donc donnée par

$$T : \begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0).(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0).(t - t_0) \end{cases} \quad t \in \mathcal{D} .$$

et on peut en déduire facilement une équation de la forme $y = mx + b$ (ou $x = x(t_0)$ si $x'(t_0) = 0$) en exprimant $(t - t_0)$ dans la deuxième équation en terme de x à l'aide de la première équation :

$$y = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) .$$

• Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{o}$, c'est à dire $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors le point $M(t_0)$ est dit **stationnaire ou singulier**.

1.3.1 Etude en un point stationnaire $M(t_0)$.

On suppose que les fonctions x et y sont au plusieurs fois dérivables.

1. Si $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ et $(x''(t_0), y''(t_0)) \neq (0, 0)$: Dans ce cas, la tangente (T) à C en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ de vecteur directeur le vecteur $\vec{V}''(t_0) = \frac{d^2}{dt^2}M(t_0)$ de composantes $(x''(t_0), y''(t_0))$.
2. Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{V}''(t_0) = \dots = \vec{o}$, $\vec{V}^{(p)}(t_0) \neq \vec{o}$: On généralise le cas précédent. La tangente T à C en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ et qui a comme vecteur directeur $\vec{V}^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$.

1.3.2 Position de C par rapport à T en un point $M(t_0)$

On désigne par p le premier entier ≥ 0 tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$:

$$p = \min \left\{ p \in \mathbb{N}^* \mid \vec{V}^{(p)} \neq \vec{o} \right\}$$

et par q le premier entier strictement supérieur à p tel que les vecteurs $\vec{V}^{(p)}$ et $\vec{V}^{(q)}$ ne soient pas colinéaires. (On peut écrire

$$q = \min \left\{ q \in \mathbb{N}^* \mid \vec{V}^{(q)} \neq \lambda \vec{V}^{(p)} \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

car pour $q \leq p$ la dernière relation n'est pas satisfaite non plus.

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre q , c'est-à-dire le $DL_q(t_0)$:

$$(S) \begin{cases} x(t) = x(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_1(t) \\ y(t) = y(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_2(t) \end{cases}$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_2(t) = 0$.

En écrivant (S) sous forme vectorielle, il vient :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \vec{V}^{(p)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{V}^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \vec{\varepsilon}(t)$$

Or, $\vec{V}^{(p+1)}(t_0), \dots, \vec{V}^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires à $\vec{V}^{(p)}(t_0)$, donc

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)^p \left[\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{t-t_0}{(p+1)!} + \dots + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!} \right] \vec{V}^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{V}^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \vec{\varepsilon}(t)$$

Etudions le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ dans le repère $(M(t_0), \vec{V}^{(p)}(t_0), \vec{V}^{(q)}(t_0))$. Si $x_1(t)$ et $y_1(t)$ désignent ses composantes dans cette base, on a les équivalences (au voisinage de t_0)

$$x_1(t) \underset{(t_0)}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad y_1(t) \underset{(t_0)}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Selon la parité de p et de q , on a les résultats suivants :

- Définition 4**
1. p pair et q impair : au voisinage de t_0 , $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t)$ a le signe de $(t-t_0)$: \mathcal{C} traverse la tangente T en $M(t_0)$, qui est un **point de rebroussement de 1^e espèce**.
 2. p pair et q pair : au voisinage de t_0 , $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t) \geq 0$, indépendamment du signe de $(t-t_0)$: \mathcal{C} ne traverse pas la tangente T ; $M(t_0)$ est un **point de rebroussement de 2^e espèce**.
 3. p impair et q pair : au voisinage de t_0 , $x_1(t)$ change de signe et $y_1(t) \geq 0$: \mathcal{C} touche la tangente T ; $M(t_0)$ est appelé "**méplat**".
 4. p impair et q impair : au voisinage de t_0 , $x_1(t)$ et $y_1(t)$ changent de signe : \mathcal{C} traverse la tangente T en $M(t_0)$, qui est appelé **point d'inflexion**.

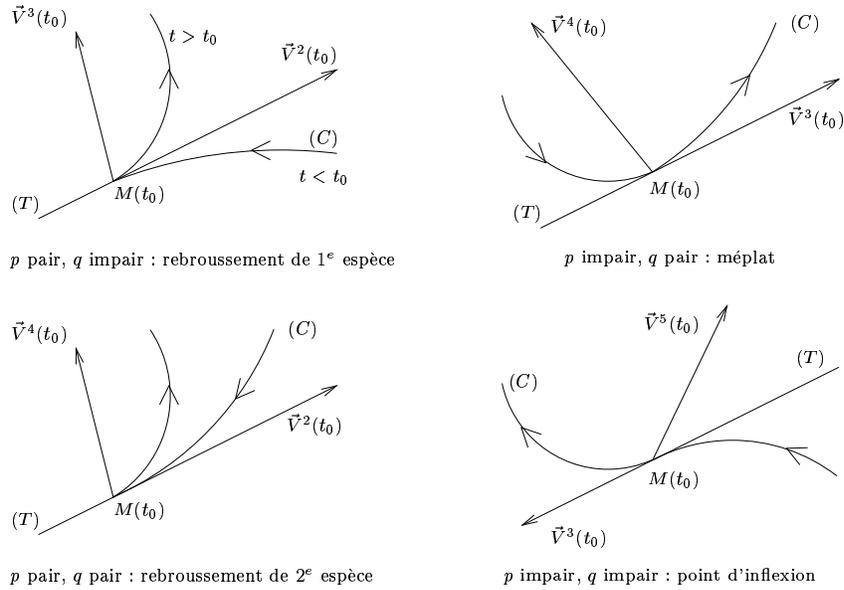


FIG. 2 – Exemples type des quatre natures de points (singuliers) possibles

1.3.3 Points doubles (ou multiples)

Définition 5 S'il existe $t' \neq t$ tels que $M(t') = M(t)$, on dit que $M(t)$ est un point double (ou multiple).

Pour trouver les points doubles, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases}$$

avec $t' \neq t$. (C'est en général un calcul assez lourd... !)

1.4 Etude d'un exemple

Etudions la courbe C définie par $\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

1. Domaine de définition : x et y sont définis sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Recherche de symétries : il n'y a pas de symétries évidentes. (y est paire mais x n'a pas de parité définie.)

3. Etude de branches infinies.

(a) $t \rightarrow \pm\infty$: On a $x \rightarrow +\infty$ et $y \rightarrow +\infty$, il faut donc étudier $\frac{y}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$,
 et $y(t) - 1.x(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 0$: La droite d'équation $\Delta : y = x$ est asymptote à la courbe pour les deux arcs infinis $t \rightarrow \pm\infty$.

(b) $t \rightarrow 0$: On a $y \sim \frac{1}{t^2} \rightarrow +\infty$ et $x \sim \frac{2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^\pm} \pm\infty$ (selon le signe de t). On étudie donc $\frac{y}{x} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{2t} \rightarrow \pm\infty$, on a donc deux branches parabolique de direction (Oy) en $t = 0$

4. étude du signe de x' et y' :

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2}{t^2} (t^3 - 1) = \frac{2}{t^2} (t - 1) (t^2 + t + 1) \\ y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2}{t^3} (t^4 - 1) = \frac{2}{t^3} (t^2 + 1) (t - 1) (t + 1) \end{cases}$$

donc x' a le signe de $t - 1$ et y' a le signe de $t(t^2 - 1)$:

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	-	-		-	0 +
$x(t)$	$+\infty$	\searrow -1 \searrow	$-\infty$		$+\infty$ \searrow 3 \nearrow $+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	\searrow 2 \nearrow	$+\infty$		$+\infty$ \searrow 2 \nearrow $+\infty$
$y'(t)$	-	0 +		-	0 +

5. étude en $t = 1$

$x'(1) = y'(1) = 0 \implies M(1) : (3, 2)$ est un point stationnaire.

Calculons les dérivées successives de x et y en $t = 1$ pour connaître le vecteur directeur de la tangente et la nature du point :

$$\begin{cases} x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3} \\ y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4} \end{cases} \implies \begin{cases} x''(1) = 6 \\ y''(1) = 8 \end{cases}$$

Donc $\vec{V}''(1) = (6, 8) \neq \vec{0} \implies \mathcal{C}$ admet une tangente en $M(1) : (3, 2)$ de vecteur directeur $\vec{V}''(1) = (6, 8)$.

(Son équation est donc $T : y = \frac{8}{6}(x - 3) + 2 = \frac{4}{3}x - 2$.)

Nature du point :

$$\begin{cases} x'''(t) = -\frac{12}{t^4} \\ y'''(t) = -\frac{24}{t^5} \end{cases} \implies \begin{cases} x'''(1) = -12 \\ y'''(1) = -24 \end{cases}$$

$\vec{V}'''(1) = (-12, -24)$ est non colinéaire à $\vec{V}''(1) = (6, 8)$, on est donc dans le cas $p = 2, q = 3$, c'est-à-dire le point $M(1) : (3, 2)$ est un pt de rebroussement de 1^e espèce.

6. recherche de points doubles :

cherchons $t' \neq t$ tel que $M(t') = M(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases} \iff \begin{cases} t'^2 + \frac{2}{t'} = t^2 + \frac{2}{t} \\ t'^2 + \frac{2}{t'^2} = t^2 + \frac{2}{t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'^2 - t^2 = \frac{2}{t} - \frac{2}{t'} = 2\frac{t'-t}{tt'} \\ t'^2 - t^2 = \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t'^2} = 2\frac{t'^2-t^2}{t'^2 t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} t' + t = \frac{2}{tt'} \\ 1 = \frac{1}{t^2 t'^2} \end{cases}$$

car $t \neq t'$. Donc

$$\begin{cases} tt' = \pm 1 \\ t + t' = \pm 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \pm \frac{1}{t} \\ t^2 \mp 2t \pm 1 = 0 \end{cases}$$

Le premier choix de signes est à exclure car il correspond à $(t-1)^2 = 0$, soit $t = 1 = t'$. Donc t, t' sont les solutions à $t^2 + 2t - 1 = 0$, soit $t = -1 + \sqrt{2}$ et $t' = -1 - \sqrt{2}$.

Le point double est donc $M(t) = M(t') = (5, 6)$.

7. Tracé de la courbe : (cf. figure ci-dessous)

on reporte les asymptotes, le pt. stationnaire avec sa tangente. En partant de $-\infty$, au dessus de l'asymptote, on rejoint le pt. $(-1, 2)$ avec une tangente horizontale, puis on repart pour $t \rightarrow 0^-$ vers $x = -\infty, y = +\infty$ (branche parabolique de direction Oy) (pour $x = -10, y \approx 25$).

Pour t au voisinage de $+\infty$, on vient de en-dessous de l'asymptote $y = x$, et on rejoint le pt. singulier $(3, 2)$ avec la tangente de vecteur directeur $(6, 8)$, puis on repart de l'autre coté de cette tangente, en passant par le pt. double $(5, 6)$, pour la branche parabolique de direction Oy , quand $t \rightarrow 0^+$ (pour $x = 10, y \approx 25$).

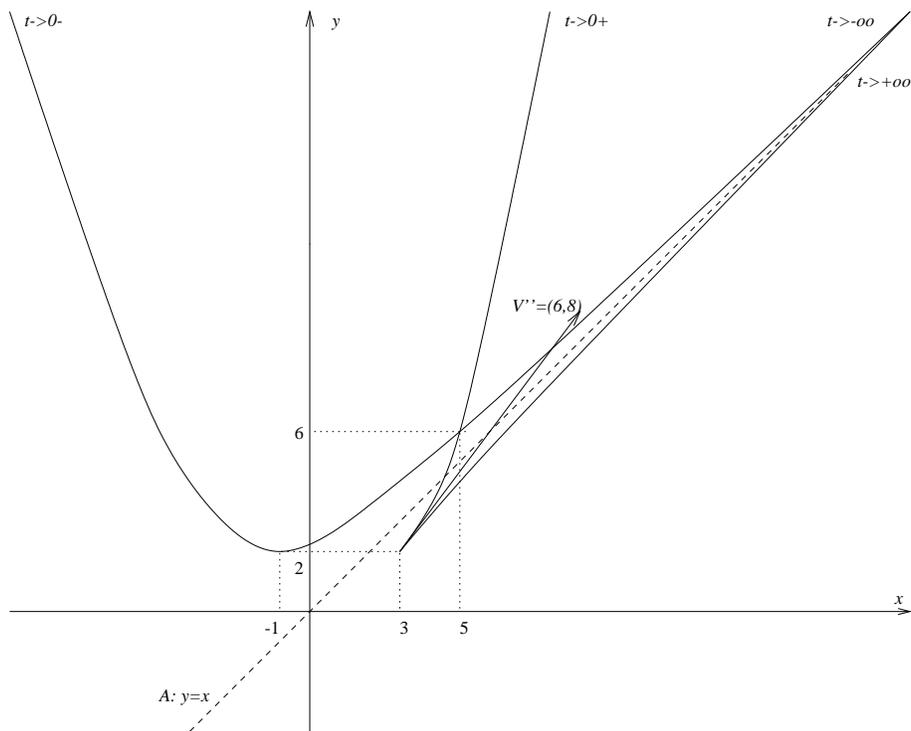


FIG. 1 – Graphe de la courbe étudiée, avec l'asymptote $y = x$ et le vecteur directeur de la tangente en le point de rebroussement.