Fiche TD (1)

EX 01 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que

1°/ L'application : $L : E \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \|x\|$

est lipschitzienne donc uniformément continue.

2°/ Les translations et les homothéties de rapport non nul sont des homéomorphismes de E dans E.

$L : E \to E$, $x \mapsto x + a$, $L : E \to E$, $x \mapsto \lambda x$, $a \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

EX 02 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a, b \in E$ et $r > 0, \lambda > 0$.

Montrer que : $B(a,r) + b = B(a+b, r)$

$\lambda B(a,r) = B(\lambda a, \lambda r)$.

EX 03 : On considère l'espace $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$.

1°/ Montrer que, pour $f \in E$, les quantités suivantes sont bien définies et sont des normes sur E.

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)| \ , \ \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)| \, dt$$

2°/ Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

3°/ Pour tout $n \geq 1$ et $t \in [-1,1]$, on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

- Montrer que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- Converge-t'elle dans cet espace ?
- Qu'en déduit-on ?

<u>Ex04</u> : Soit $c_0 = \{ z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \lim_{n \to \infty} z_n = 0 \}$, est muni de la norme :

$$\|z\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |z_n| .$$

Montrer que c_0 est un espace de Banach

<u>Ex05</u> : Soit E un evn. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série d'éléments de E normalement convergente est convergente dans E.