Fiche TD 2

Exo 1 : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que propriétés suivants sont equivalents :

(i) f est continue ;

(ii) Pour toute $(x_n) \subset E$ converge vers 0, la suite $(f(x_n))_n$ est bornée.

Exo 2 : On considère l'espace de Banach $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

* Montrer que les applications suivantes T sont linéaires continues.
* Calculer leur norme d'operateur $\|T\|$ et voir si elle est atteinte sur la sphère unité $\{f \in E ; \|f\|_\infty = 1\}$.

~~Fiche~~

1°/ $T : E \longrightarrow E$

$$f \longmapsto T(f) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2°/ $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f \longmapsto T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

3°/ $T : E \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f \longmapsto T(f) = f(1) - f(0).$$

Exo3 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue non nulle. Soit $H = \ker(\varphi)$.

Montrer que $\forall x \in E$, $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$.

EX 04 : 1/ Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Montrer que l'application

$$T_x : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$y \longrightarrow T_x(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

est un forme linéaire continue sur ℓ^2, de norme égale à $\|x\|_\infty$.

2/ Soit $T : (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\ell^{2*}, \|\ \|)$
$$x \longrightarrow T_x$$

Montrer que T est un isomorphisme isométrique de ℓ^∞ sur le dual topologique de ℓ^2.

Exo 5 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Pour tout $x \in E$ et tout $g \in E^*$, on note $\langle x, g \rangle = g(x)$

* Montrer que l'application

$$T : E \times E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x, g) \longmapsto \langle x, g \rangle$$

est bilinéaire et continue.

* Soient E, F deux evn et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $f \in F^*$,

$$\langle T(x), f \rangle = \langle x, T^*(f) \rangle .$$

* Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.