Fiche TD 3

Exo 1 : Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et pour $f \in E$, on définit.

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1°/ * Montrer que, pour $n \geq 1$, on a :

$$T^n f(x) = \int_0^x k_n(x,t) f(t)\,dt \text{ , où}$$

$$k_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

* En déduire la valeur de la norme $\|T^n\|$, $n \geq 1$

2°/ Calculer la somme $\sum_{n \geq 1} T^n$.

3°/ Résoudre l'équation $(I - T)$

Exo 2 : $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

et $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est continue.

on désigne par T l'opérateur défini par $T(f) = f \circ \varphi$.

* Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
* Montrer l'équivalence

T isométrie $\Leftrightarrow \varphi$ surjective.

Exo3 : $E = C([0,1])$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes.

On considère les deux espaces normés :

$(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|_1)$.

$$\|f\|_\infty = \sup |f(t)| \ , \ t \in [0,1].$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

On désigne par id l'application identité

* Montrer que id est bijective, continue. Quelle est sa norme ?
* ~~Montrer que id est bijective~~
* Montrer que id^{-1} n'est pas continue. (on pourra utiliser la suite $f_n(t) = t^n$).
* En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Solutions TD 3

EX 01. 1/ * T est bien défini sur $C([0,1])$. et linéaire continu.

Démontrons le résultat par récurrence.

pour $n=1$, on a $K_1(x,t)=1$,

Supposons le résultat vrai pour un $p \geq 1$ (i.e)

$$K_p(x,t) = \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} \text{ et donc}$$

$$T^p f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f(t)\, dt$$

$$\text{et } T^{p+1} f(x) = \int_0^x (T^p f)(t)\, dt$$

$$= \int_0^x \left[\int_0^t \frac{(t-u)^{p-1}}{(p-1)!} f(u)\, du \right] dt$$

En échangeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$T^{p+1} f(x) = \int_0^x f(u) \left[\int_u^x \frac{(t-u)^{p-1}}{(p-1)!}\, dt \right] du$$

$$= \int_0^x \frac{(x-u)^p}{p!} f(u)\, du.$$

* On a $$|T^n f(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f(t)|\, dt$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$\leqslant \dfrac{x^n}{n!} \|f\|_\infty$, d'où $\|T^n\| \leqslant \dfrac{1}{n!}$

Maintenant, pour $f_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$,

$$T^n f_0(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, dt = \frac{x^n}{n!}$$

d'où $\|T^n f_0\|_\infty = \dfrac{1}{n!}$, et finalement $\|T^n\| = \dfrac{1}{n!}$.

2/ on a $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \|T^n\| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} = e - 1$.

Comme E est complet, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} T^n$ est convergente

et on a pour tout k entier

$$\sum_{n=1}^{k} T^n f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right) f(t) \, dt$$

Soit $S : E \longrightarrow F$ défini par $S f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t) \, dt$

clairement $S \in \mathcal{L}(E)$ et de plus

$$\left| \left(S - \sum T^n\right) f(x) \right| \leqslant \int_0^x \left| e^{x-t} - \sum_{n=1}^{k} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| |f(t)| \, dt$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \int_0^x \left| e^{x-t} - \sum_{n=1}^{k} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| dt$$

d'où, en faisant le changement de variable

$u = x - t$, l'inégalité

$$\left|\left(S - \sum_{n=1}^{k} T^n\right) f(x)\right| \leq \|f\|_\infty \int_0^x \left| e^u - \sum \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right| du$$

$$\leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq u\leq 1} \left|e^u - \sum_{n=1}^{k} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right|$$

donc $\left\|S - \sum_{n=1}^{k} T^n\right\| \leq \sup \left|e^u - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{u^n}{n!}\right|$

~~On~~ Comme la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$ converge uniformément vers e^u sur tout compact de $\mathbb{R}$, il vient $S = \sum_{n\geq 1} T^n$ en faisant tendre k vers l'infini

3/ En passant à la limite dans

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{k} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{k} T^n\right)(I-T)$$
$$= I - T^{k+1}$$

On obtient $(I-T)^{-1} = \sum T^n = I + S$

Soit maintenant $g \in E$, alors on a

$$f = (I-T)^{-1} g = (I+S)\, g$$

Soit encore $f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\, dt.$