Fiche TD 3 Géométrie

Exercice 1

Soit la courbe gauche $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t\,, at),\ \text{où } a \neq 0.$$

1. Montrer que la courbe est régulière et birégulière.

2. Déterminer une paramétrisation par abscisse curviligne.

3. Calculer la courbure de la courbe, le trièdre de Frenet "T, N, B" ainsi que sa torsion.

Solution

1° $\forall\, t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) \neq 0$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}, \gamma''(t) \neq 0$

2° On choisit $t_0 = 0$, soit $S(t) = \int_0^t \left\|\gamma^{'(u)}\right\| du = \int_0^t \sqrt{1+a^2}\, du = t\sqrt{1+a^2} = s$

donc $S^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{1+a^2}}$

par suite la paramétrisation par l'abscisse curviligne est:

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma_0 S^{-1}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{as}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

3° $k(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \left\| \left(-\frac{1}{1+a^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), -\frac{1}{1+a^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right)\right\| = \frac{1}{1+a^2}$

$$T(s) = \tilde{\gamma}'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

$$N(s) = \frac{1}{k(s)}\tilde{\gamma}''(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right).$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

$$\tau(s) = B^{'(s)}.N(s)$$

$$= \left(\frac{a}{1+a^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{a}{1+a^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right) . \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right), 0\right)$$

$$= -\frac{a}{1+a^2}$$

Exercice 2

$\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3 dont touts les points sont birégulières . Montrer que :

la courbe est plane $\Leftrightarrow \ \forall\, t \in I\,,\ \tau(t) = 0$.

Solution

Soit $\tilde{\gamma}(s) = \gamma_0 S^{-1}(s)$ paramétrisation par l'abscisse curviligne donc $\forall\, t \in I\,,\ \tau(t) = 0 \Leftrightarrow \forall\, s \in J\,,\ \tau(s) = 0$

On à $\tau(s) = B'(s).N(s) = 0 \Leftrightarrow B'(s) = 0$ (car B' et N sont colineaires)

$\Leftrightarrow B(s)$ est constant $\forall\, s \in J$

$\Leftrightarrow$ la courbe est plane.